Made by Андрей Forty и Skorososs123

Определение 1. Комплексная плоскость $\mathbb{C}$ есть множество упорядоченных пар (x, y) вещественных чисел. Точки комплексной плоскости называются *комплексными числами* и обозначаются $z = (x, y)$. Координаты x и y называются соответственно *вещественной* и *мнимой* частями комплексного числа $z = (x, y)$ и обозначаются через

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Оси абсцисс и ординат будем называть соответственно *вещественной* и *мнимой* осями. Комплексные числа, лежащие на вещественной оси, называются *вещественными* (или *действительными*), комплексные числа, лежащие на мнимой оси, называются *чисто мнимыми*.

Каждому комплексному числу $z = (x, y)$ сопоставляется комплексно сопряженное к нему число $\overline{z} = (x, -y)$.

Рассматривая множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ как вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$, можно ввести на нем структуру векторного пространства (над полем $\mathbb{R}$). Векторы $1 := (1, 0)$ и $i = (0, 1)$ образуют базис в $\mathbb{C}$, любое комплексное число $z = (x, y)$ в этом базисе имеет вид

$$z = (x, y) = x \cdot 1 + y \cdot i \equiv x + iy.$$

Запись комплексного числа в виде $x+iy$ называется *алгебраической формой* комплексного числа. Из аксиом векторного пространства получаем формулу сложения комплексных чисел

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Введем на множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$ умножение, которое на базисных элементах 1 и i задается по правилу

$$1 \cdot 1 = 1, 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, i \cdot i = -1,$$

а далее продолжается по линейности на все $\mathbb{C}$:

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Так определенные сложение и умножение удовлетворяют всем аксиомам поля, в котором нулем является число $0 := (0, 0)$, единицей, как и выше, является число $1 = (1, 0)$, а обратным к произвольному комплексному числу $z = x + iy$, не равному нулю, является число

$$z^{-1} \equiv \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Таким образом, $\mathbb{C}$ является полем комплексных чисел. Основным отличием поля $\mathbb{C}$ от полей $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ является его *алгебраическая замкнутость*: каждый непостоянный полином с комплексными коэффициентами имеет в $\mathbb{C}$ корень. Это свойство следует из основной теоремы алгебры, несколько доказательств которой будут предложены в курсе.

Полярное представление. Пусть $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Используя полярные координаты $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, имеем полярное представление

$$z = re^{i\phi} := r\cos\phi + ir\sin\phi. \tag{1.1}$$

Величина $r = |z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$. Отметим, что угол ϕ представлении (1.1) определен неоднозначно. Если $z = 0$, то он может быть любым. Если $z \neq 0$, то угол ϕ определен с точностью до 2π. Пусть $\arg z \in (-\pi, \pi]$ — угол между положительным направлением вещественной оси и вектором z (см. рис. 1.1). В таком случае угол ϕ удовлетворяет полярному представлению (1.1) тогда и только тогда, когда

$$\phi \in \operatorname{Arg} z := \{\arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Каждый элемент множества $\operatorname{Arg} z$ называется *аргументом* комплексного числа z. Величину $\arg z \in (-\pi, \pi]$ иногда называют главным значением аргумента числа z.

Формулы умножения и деления комплексных чисел приобретают в полярной форме удобный вид. Произведение и частное комплексных чисел $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$ равны

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\phi_1} \cdot r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}.$$

Извлечение корня. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$. Решим уравнение

$$z^n = a. \tag{1.2}$$

Представим z и a в полярной форме: $z = re^{i\phi}$, $a = \rho e^{i\arg a}$. Тогда $r^n e^{in\phi} = \rho^{i\arg a}$.

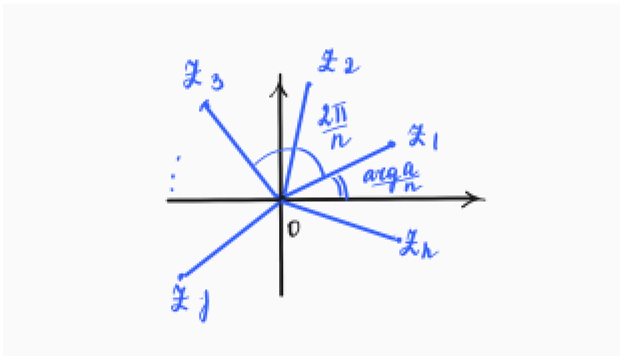


Рис. 1.2:

Рассмотрим два случая. Если $a = 0$, то $\rho = 0$, следовательно, $r = 0$ и $z = 0$ — единственное решение уравнения (1.2).

Если $a \neq 0$, то $r^n = \rho$, $n\phi = \arg a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$z \in \{z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\arg a + 2\pi k}{n}}, k \in \mathbb{Z}\} \tag{1.3}$$

Так как $z_k = z_{k\pm n} = z_{k\pm 2n} = \ldots$, то в формуле (1.3) достаточно считать $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Числа z_0, ..., z_{n-1} попарно различны. На комплексной плоскости они расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в нуле радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ (см. 1.2). Итак, при $a \neq 0$, уравнение (1.2) имеет ровно n корней

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\arg a + 2\pi k}{n}}, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

8. **Определение производной ф.к.п. Дифференцируемость, свойства операции дифференцирования.**

Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в окрестности точки $c = a + ib$.

Обозначим, как обычно, $\Delta x := x - a$, $\Delta y := y - b$, $\Delta z := \Delta x + i\Delta y$, $\Delta u := u(x, y) - u(a, b)$, $\Delta v := v(x, y) - v(a, b)$, $\Delta f := f(z) - f(c) = \Delta u + i\Delta v$. Из курса математического анализа известно, что $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке $c \iff$ существуют такие числа A_1, A_2, B_1, $B_2 \in \mathbb{R}$, что в окрестности точки c справедливы представления

$$\begin{aligned} \Delta u =& A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + o_1(|\Delta z|), \\ \Delta v =& B_1 \Delta x + B_2 \Delta y + o_2(|\Delta z|). \end{aligned} \tag{2.1}$$

(Здесь, как обычно, функции o_j при $j = 1, 2$, удовлетворяют соотношению $\lim_{z\to c} \frac{o_j(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$.) При этом, если функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в точке c, то $A_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$, $A_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$, $B_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$, $B_2 = \frac{\partial v}{\partial y}$, где все частные производные берутся в точке c.

Определение 11. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой, или $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке c, если существует такое число $C \in \mathbb{C}$, что в окрестности точки c справедливо представление

$$\Delta f = C\Delta z + o(|\Delta z|). \tag{2.2}$$

Здесь $o(|\Delta z|)$ — комплекснозначная функция, удовлетворяющая соотношению $\lim_{z\to c} \frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$. Удобно также использовать свойство $o(|\Delta z|) = o(1)\Delta z$, где $\lim_{z\to c} o(1) = 0$. Деля обе части равенства (2.2) на Δz и устремляя Δz к нулю, получаем, что $f(z)$ является дифференцируемой в точке c тогда и только тогда, когда существует $\lim_{z\to c} \frac{\Delta f}{\Delta z} = C := f'(c)$. Число $f'(c)$ называется *комплексной производной* функции f в точке c. Из (2.2) следует, что функция, дифференцируемая в точке c, непрерывна в этой точке.

Следующие правила дифференцирования доказываются так же, как и в курсе математического анализа, поэтому мы приведем их без доказательства.

1. Арифметические действия. Если функции f и g дифференцируемы в точке z, то их сумма, произведение и частное (при $g(z) \neq 0$) тоже дифференцируемы в точке z, причем

$$(f(z)+g(z))' = f'(z)+g'(z), \quad (f(z)g(z))' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z),$$
$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}. \tag{2.15}$$

2. Дифференцирование суперпозиции. Если функция f дифференцируема в точке z, а функция g дифференцируема в точке $f(z)$, то суперпозиция $g \circ f$ дифференцируема в точке z и

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z). \tag{2.16}$$

3. Дифференцирование обратной функции.

Теорема 3. *Пусть отображение $w = f(z)$ гомеоморфно (то есть взаимно однозначно и взаимно непрерывно) переводит окрестность U точки c в окрестность V точки $f(c)$. Через $z = g(w)\colon V \to U$ обозначим обратное отображение к $w = f(z)$. Тогда если f дифференцируема в точке c и $f'(c) \neq 0$, то функция g дифференцируема в точке $f(c)$ и $g'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$.*

Доказательство. Для $w \in V$ положим $z = g(w)$. Тогда $w = f(z)$ и $\frac{g(w)-g(f(c))}{w-f(c)} = \frac{z-c}{f(z)-f(c)}$. Так как отображение $w = f(z)$ гомеоморфно, то $w \to f(c) \iff z \to c$. Отсюда

$$g'(f(c)) = \lim_{w \to f(c)} \frac{g(w) - g(f(c))}{w - f(c)} = \lim_{z \to c} \frac{z - c}{f(z) - f(c)} = \frac{1}{f'(c)}.$$

$\square$

Определение 14. Функция f называется *голоморфной в точке* $c \in \mathbb{C}$ (пишут $f \in \mathcal{O}(c)$), если f дифференцируема в некоторой окрестности U точки c и $f'(z) \in C(U)$. Функция f называется *голоморфной на множестве* $D \subset \mathbb{C}$ (пишут $f \in \mathcal{O}(D)$), если f голоморфна в каждой точке множества D.

Замечание 1. На самом деле непрерывность производной $f'(z)$ следует из существования производной в окрестности каждой точки множества. Доказательство этого факта мы опускаем по техническим причинам.

Из сказанного выше следует:

Во-первых, если $f, g \in \mathcal{O}(D)$, то $f + g, fg \in \mathcal{O}(D)$, а если $g \neq 0$ в точках множества D, то и $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}(D)$ и справедливы формулы (2.15).

Во-вторых, если D, G — открытые множества в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(D)$, $f(D) \subset G$ и $g \in \mathcal{O}(G)$, то суперпозиция $g \circ f \in \mathcal{O}(D)$ и справедлива формула (2.16).

В третьих, справедливо утверждение о голоморфности обратной функции

Предложение 6. *Пусть $D, G \in \mathbb{C}$ — открытые множества и отображение $w = f(z)$ является гомеоморфизмом D на G. Через $z = g(w)$: $G \to D$ обозначим обратное отображение к $w = f(z)$. Тогда если $f \in \mathcal{O}(D)$ и $f' \neq 0$ в точках из D, то $g \in \mathcal{O}(G)$ и $g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$ для любого $w \in G$.*

Замечание 2. На самом деле требование $f'(z) \neq 0$ вытекает из остальных условий. Доказательство этого факта мы приведем позже.

Примеры.

4. Из формул (2.15) следует, что $(z^n)' = nz^{n-1}$ для всех целых n, многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ дифференцируем во всех

точках $z \in \mathbb{C}$, а рациональная функция $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, где P, Q — многочлены, дифференцируема во всех точках $z \in \mathbb{C}$, где $Q(z) \neq 0$. При этом формулы для производных $P'(z)$ и $R'(z)$ такие же, как и в случае действительной переменной. Тем самым многочлен является голоморфной функцией всюду в $\mathbb{C}$, а рациональная функция голоморфна вне множества нулей знаменателя.

5. *Экспоненциальная функция.* Для каждого $z = x+iy \in \mathbb{C}$ определим экспоненту комплексного числа z формулой $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Так заданная функция в случае действительных и чисто мнимых значений $z = x$ и $z = iy$ совпадает с введенными ранее e^x и e^{iy} соответственно. Поскольку функции $u(x, y) = e^x \cos y$ и $v(x, y) = e^x \sin y$ дифференцируемы для любых значений $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y,$$

то по теореме 1 функция e^z дифференцируема в любой точке $z \in \mathbb{C}$. При этом

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Таким образом, функция e^z голоморфна всюду $\mathbb{C}$. Непосредственно из определения следует, что экспоненциальная функция является периодической с периодом $2\pi i$ и $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

6. *Гиперболические и тригонометрические функции.* Положим

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Для действительных значений $z = x$ так введенные функции совпадают с ранее введенными $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$ и $\sin x$ соответственно. Из формул (2.15), (2.16) получаем, что все четыре функции дифференцируемы для всех $z \in \mathbb{C}$, а их производные вычисляются по тем же формулам, что и для действительной переменной

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{sh} z,$$

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z.$$

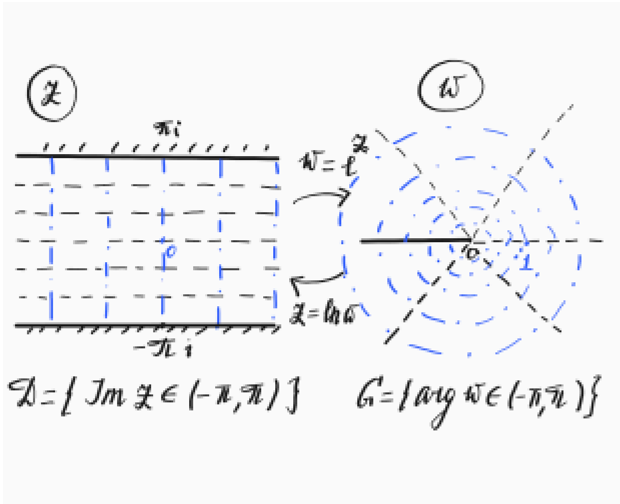


Рис. 2.3:

Таким образом, функции $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, $\cos z$, $\sin z$ голоморфны всюду в $\mathbb{C}$.

Логарифмическая функция. Для каждого $w \in \mathbb{C}$ решим относительно $z = x + iy$ уравнение

$$e^z = w. \tag{2.17}$$

Так как $|e^z| = e^x$, то при $w = 0$ уравнение (2.17) не имеет решений.

Пусть $w \neq 0$. Представим $w = |w|e^{i \arg w}$, где $\arg w \in (-\pi, \pi]$. Тогда равенство (2.17) равносильно системе

$$\begin{cases} e^x = |w|, \\ y = \arg w + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2.18}$$

следовательно, $e^z = w \iff z \in \operatorname{Ln} w := \{\ln |w| + i \arg w + 2\pi i k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Рассмотрим область $D = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}$. Из приведенных выше рассуждений получаем, что отображение $w = e^z$ взаимно однозначно переводит D на область $G = \{w \in \mathbb{C} : \arg w \in (-\pi, \pi)\}$ (см. рис. 2.3). Обратное отображение $z = g(w)$ задается функцией $g(w) = \ln w := \ln |w| + i \arg w$. Так как обе функции e^z и $\ln w$ непрерывны в областях D и G соответственно, то отображение $w = e^z$ является гомеоморфизмом D на G. Также $(e^z)' = e^z \neq 0$, значит по теореме 3 функция

$\ln w$ является дифференцируемой в области G и

$$(\ln w)' = \frac{1}{w}. \tag{2.19}$$

Функция $\ln z$ является голоморфной в области D. Ее иногда называют главным значением логарифма. При вещественных положительных $z = x$ она совпадает с ранее введенной действительной функцией $\ln x$.

ференцирования.

9. Условия Коши – Римана. Примеры.

Теорема 1. *Для дифференцируемости функции $f(z)$ в точке c необходимо и достаточно, чтобы в точке c во-первых, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы и во-вторых, выполнялись условия Коши-Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.3}$$

Если $f(z)$ является дифференцируемой в точке c, то

$$f'(c) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{2.4}$$

все частные производные берутся в точке c.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(z)$ дифференцируема в точке c. Тогда существует такое $C \in \mathbb{C}$, что справедливо представление (2.2). Подставив $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $C = P + iQ$, $o(|\Delta z|) = o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|)$ в (2.2), получаем

$$\Delta u + i\Delta v = (P + iQ)(\Delta x + i\Delta y) + o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|). \tag{2.5}$$

Приравнивая в этом соотношении действительные и мнимые части, получаем

$$\begin{aligned} \Delta u &= P\Delta x - Q\Delta y + o_1(|\Delta z|) \\ \Delta v &= Q\Delta x + P\Delta y + o_2(|\Delta z|). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Так как $\max(|o_1(|\Delta z|)|, |o_2(|\Delta z|)|) \le |o(|\Delta z|)|$ и $\lim_{z\to c} \frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$, то и $\lim_{z\to c} \frac{o_1(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = \lim_{z\to c} \frac{o_2(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$. Отсюда для $A_1 = B_2 = P$, $B_1 = -A_2 = Q$ имеет место (2.1), поэтому функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы в точке c и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = P, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = Q,$$

где все частные производные берутся в точке c, следовательно, выполнены условия Коши-Римана (2.3).

Достаточность. Пусть в точке c функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы, а их частные производные удовлетворяют условиям Коши-Римана (2.3). Положим $P := \frac{\partial u}{\partial x}(c)$, $Q := \frac{\partial v}{\partial x}(c)$. Тогда в точке c имеют место соотношения (2.6), где $\lim_{z\to c} \frac{o_1(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = \lim_{z\to c} \frac{o_2(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$. Отсюда

$$\begin{aligned}\Delta f = \Delta u + i\Delta v = P\Delta x - Q\Delta y + i(Q\Delta x + P\Delta y) + o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|) = \\ = (P+iQ)(\Delta x + i\Delta y) + o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|) = \\ = (P+iQ)\Delta z + o(|\Delta z|).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Так как $|o(|\Delta z|)| = |o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|)| \le |o_1(|\Delta z|)| + |o_2(|\Delta z|)|$, то $\lim_{z\to c} \frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$. Следовательно, f дифференцируема в точке c и $f'(c) = P + iQ = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Из условий Коши-Римана получаем два оставшихся равенства в (2.4).

□

Примеры. 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда

$$(z^n)' = \lim_{\xi\to z} \frac{\xi^n - z^n}{\xi - z} = \lim_{\xi\to z}(\xi^{n-1} + z\xi^{n-2} + \dots + z^{n-1}) = nz^{n-1}.$$

2. Рассмотрим линейную функцию $f(z) = \overline{z} = x - iy$. Очевидно, что эта функция $\mathbb{R}$-дифференцируема. Однако $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$, поэтому условия Коши-Римана не выполнены ни в одной точке $z \in \mathbb{C}$, следовательно, функция $\overline{z}$ не является $\mathbb{C}$-дифференцируемой ни в одной точке.

3. Положим

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{при} \quad z \ne 0, \\ 0 & \text{при} \quad z = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Покажем, что в нуле функция f не является $\mathbb{C}$-дифференцируемой, но удовлетворяет условиям Коши-Римана. Действительно, устремим z к нулю по лучу, образующему угол $\theta \in (-\pi, \pi]$ с осью x. На этом луче $z = re^{i\theta}$, $f(z) = re^{5i\theta}$, следовательно, величина

$$\lim_{r\to 0+0} \frac{f(re^{i\theta}) - f(0)}{re^{i\theta}} = \lim_{r\to 0+0} \frac{re^{5i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{4i\theta}$$

является непостоянной функцией угла θ, поэтому функция f не является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в нуле.

При $x, y \in \mathbb{R}$ имеем $f(x) = x$, $f(iy) = iy$, поэтому $u(x, 0) = x$, $v(x, 0) = 0$, $u(0, y) = 0$, $v(0, y) = y$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0,$$

следовательно, в нуле функция f удовлетворяет условиям Коши-Римана.

10. Определение голоморфной функции. Элементарные ф.к.п.

СМОТРЕТЬ БИЛЕТ 8

11. Геометрический смысл модуля и аргумента производной ф.к.п.

Пусть по-прежнему функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в окрестности U точки $c = a + ib$. Наряду с функцией f мы будем рассматривать отображение $w = f(z)$: $x + iy \to u + iv$, задаваемое равенствами

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в точке c. Тогда функция $f(z)$ дифференцируема в этой точке $\iff$ существуют такие P, $Q \in \mathbb{C}$, что в точке c матрица Якоби отображения $w = f(z)$ имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

При этом, если выполняется равенство (2.9), то $f'(c) = P + iQ$.

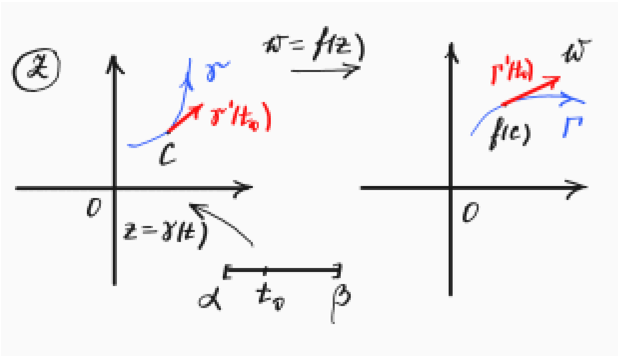


Рис. 2.1:

Предположим теперь, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точках множества U. Рассмотрим непрерывную кривую γ, лежащую в U и проходящую через точку c, задаваемую уравнением $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$: $[\alpha, \beta] \to U$, $\gamma(t_0) = c$. Допустим, что функции $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0. Тогда

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

— касательный вектор к кривой γ в точке c (см. рис.2.1).

Рассмотрим кривую Γ, являющуюся образом кривой γ при отображении f. Тогда $\Gamma(t) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$, $\Gamma(t_0) = f(c)$. Из свойств суперпозиции получаем, что функции $u(x(t), y(t))$ и $v(x(t), y(t))$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$ и дифференцируемы в точке t_0. Поэтому кривая Γ непрерывна и имеет касательный вектор в точке $f(c)$.

Найдем связь между касательными векторами $\Gamma'(t_0)$ и $\gamma'(t_0)$ в случае, если функция $f(z)$ дифференцируема в точке c.

Предложение 4. *Пусть функция f дифференцируема в точке c, а кривые γ, Γ — те же, что и выше. Тогда касательные векторы к кривым Γ и γ в точках $f(c)$ и c соответственно связаны равенством*

$$\Gamma'(t_0) = f'(c)\gamma'(t_0). \tag{2.10}$$

Доказательство. В силу дифференцируемости функции f в точке c, в точках множества U справедливо представление

$$f(z) - f(c) = (f'(c) + o(1))(z - c), \tag{2.11}$$

где $\lim_{z\to c} o(1) = 0$. Подставим $z = \gamma(t)$ в (2.11) и поделим обе части равенства (2.11) на $t - t_0$. Так как $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$, $\Gamma(t_0) = f(c)$, $\gamma(t_0) = c$, получаем

$$\frac{\Gamma(t) - \Gamma(t_0)}{t - t_0} = (f'(c) + o(1))\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \to f'(c)\gamma'(t_0)$$

при $t \to t_0$, что и требовалось доказать. □

Выясним геометрический смысл равенства (2.10) при $f'(c) \neq 0$. Дополнительно потребуем, чтобы касательный вектор $\gamma'(t_0)$ к кривой γ в точке c был отличен от нуля. Запишем $f'(c)$ и $\gamma'(t_0)$ в полярной форме:

$$f'(c) = |f'(c)|e^{i\arg f'(c)}, \quad \gamma'(t_0) = |\gamma'(t_0)|e^{i\theta}.$$

Из (2.10) следует, что $\Gamma'(t_0) = |\Gamma'(t_0)|e^{i\Theta}$, где

$$|\Gamma'(t_0)| = |f'(c)| \cdot |\gamma'(t_0)|, \quad \Theta = \arg f'(c) + \theta. \tag{2.12}$$

Геометрический смысл аргумента производной. Величина $\Theta - \theta$ называется *углом поворота кривой γ в точке c при отображении $w = f(z)$*. Из (2.12) следует, что угол поворота не зависит от кривой, имеющей ненулевой касательный вектор в точке c и равен $\arg f'(c)$. Таким образом, все такие кривые, проходящие через точку c, поворачиваются при этом отображении на один и тот же угол равный $\arg f'(c)$.

Геометрический смысл модуля производной. Величина $\frac{|\Gamma'(t_0)|}{|\gamma'(t_0)|}$ называется *линейным растяжением кривой γ в точке c при отображении $w = f(z)$*. Из (2.12) следует, что линейное растяжение не зависит от кривой, имеющей ненулевой касательный вектор в точке c, и равно $|f'(c)|$.

12. Определение конформного отображения. Критерий конформности гладкого отображения.

Наложим на отображение

$$w = f(z) : (x, y) \to (u(x, y), v(x, y))$$

следующие ограничения: во-первых, как и выше, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в окрестности U точки $c = a + ib$ и дифференцируемы в точке c, во-вторых, матрица Якоби $\left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{smallmatrix}\right)\Big|_c$ отображения $w = f(z)$ в точке c невырождена.

Как и выше, рассмотрим непрерывную кривую γ, задаваемую уравнением $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$: $[\alpha, \beta] \to U$, $\gamma(t_0) = c$, и ее образ Γ при отображении $w = f(z)$. Предположим, что в точке c кривая γ имеет ненулевой касательный вектор $\gamma'(t_0) = (p_1, p_2)$. По теореме о дифференцируемости суперпозиции, кривая Γ имеет в точке $f(c)$ касательный вектор $\Gamma'(t_0) = (P_1, P_2)$ равный

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Так как $\gamma'(t_0) \neq 0$ и матрица $\left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{smallmatrix}\right)$ невырождена, то и $\Gamma'(t_0) \neq 0$.

Рассмотрим теперь две непрерывные кривые γ_1 и γ_2, проходящие через точку $c = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ и имеющие в этой точке ненулевые касательные векторы $\gamma_1'(t_1)$ и $\gamma_2'(t_2)$.

Определение 12. Углом от кривой γ_1 до кривой γ_2 в точке c называется угол[1] от $\gamma_1'(t_1)$ до $\gamma_2'(t_2)$.

Определение 13. Отображение $w = f(z)$, удовлетворяющее приведенным выше ограничениям, называется *конформным в точке c*, если для любых двух кривых, проходящих через точку c и имеющих в этой точке ненулевые касательные векторы, угол в точке c от первой кривой до второй кривой равен углу в точке $f(c)$ от образа первой кривой до образа второй кривой при отображении $w = f(z)$. Короче говоря, отображение $w = f(z)$ называется конформным, если оно сохраняет углы между кривыми.

Теорема 2. *Отображение $w = f(z)$, удовлетворяющее приведенным выше ограничениям, является конформным в точке c $\iff$ функция f дифференцируема в точке c и $f'(c) \neq 0$.*

Доказательству теоремы предпошлем следующее техническое утверждение.

[1] Углом от вектора p до вектора q назовем угол, на который нужно повернуть p, чтобы получить вектор, сонаправленный с q.

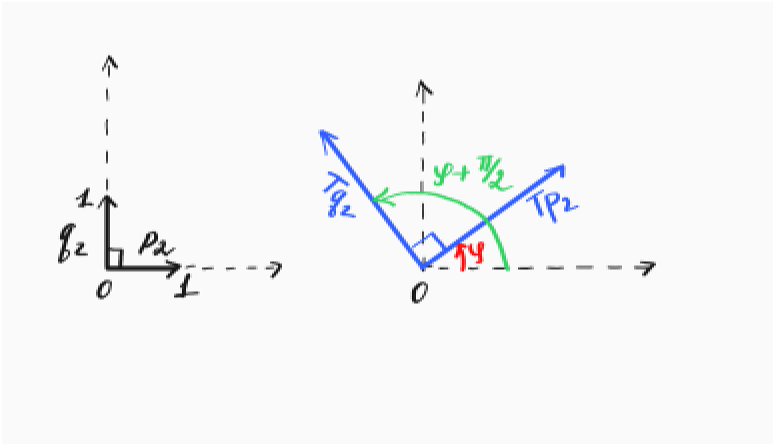


Рис. 2.2:

Предложение 5. *Пусть T — такая невырожденная вещественная 2×2 матрица, что для любых векторов $p, q \in \mathbb{R}^2$ угол от Tp до Tq равен углу от p до q. Тогда существуют такие $R > 0$ и $\phi \in (-\pi, \pi]$, что $T = \begin{pmatrix} R\cos\phi & -R\sin\phi \\ R\sin\phi & R\cos\phi \end{pmatrix}$.*

Доказательство. Положим $T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}$. Рассмотрим пару ортогональных векторов $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. По условию, векторы $Tp_1 = \begin{pmatrix} A_1+A_2 \\ B_1+B_2 \end{pmatrix}$ и $Tq_1 = \begin{pmatrix} A_1-A_2 \\ B_1-B_2 \end{pmatrix}$ также ортогональны, поэтому их скалярное произведение равно нулю. Следовательно, $A_1^2 - A_2^2 + B_1^2 - B_2^2 = 0$. Положим

$$R = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}. \tag{2.14}$$

Так как матрица T невырождена, то $R \neq 0$.

Рассмотрим теперь пару векторов $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда $Tp_2 = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$, $Tq_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$. Из (2.14) следует, что длины векторов Tp_2 и Tq_2 равны R. Пусть ϕ — угол от положительного направления оси x до вектора Tp_2. Так как угол от p_2 до q_2 равен $\frac{\pi}{2}$, то и угол от Tp_2 до Tq_2 тоже равен $\frac{\pi}{2}$, значит угол от положительного направления оси x до вектора Tq_2 равен $\phi + \frac{\pi}{2}$ (см. рис 2.2). Используя полярные координаты, получаем, что $Tp_2 = \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \end{pmatrix}$, $Tq_2 = \begin{pmatrix} -R\sin\phi \\ R\cos\phi \end{pmatrix}$. Поэтому $T = \begin{pmatrix} R\cos\phi & -R\sin\phi \\ R\sin\phi & R\cos\phi \end{pmatrix}$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть отображение f конформно в точке c. Отметим, что для любого вектора $p = p_1 + ip_2$ кривая, задаваемая уравнением $\gamma(t) = pt + c$, проходит через точку c при $t = 0$ и ее касательный вектор в точке c равен $\gamma'(0) = p$. Обозначим через T матрицу Якоби отображения $w = f(z)$ в точке c. Из определения конформного отображения следует, что матрица T удовлетворяет условиям предыдущего предложения, следовательно, $T = \left(\begin{smallmatrix} R\cos\phi & -R\sin\phi \\ R\sin\phi & R\cos\phi \end{smallmatrix}\right)$ для некоторых $R > 0$ и $\phi \in (-\pi, \pi]$. Из следствия 1 получаем, что функция f дифференцируема в точке c и $f'(c) = R(cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$.

Достаточность следует из геометрического смысла аргумента дифференцируемой функции. $\square$

14. **Интегральная теорема Коши для области с простой границей и для односвязной области.**

Напомним нужные нам в дальнейшем понятия из курса математического анализа.

Кривая $\gamma \subset \mathbb{C}$ называется *гладкой*, если ее можно задать уравнением

$$\gamma(t) = \phi(t) + i\psi(t), \quad t \in [a, b], \tag{3.1}$$

где $\phi, \psi \in C^1[a, b]$ и касательный вектор $\gamma'(t) = \phi'(t) + i\psi'(t) \neq 0$ при $t \in [a, b]$.

Кривая $\gamma \subset \mathbb{C}$ называется *кусочно гладкой*, если ее можно задать уравнением (3.1), где функции $\phi, \psi \in C[a,b]$ и существует такое разбиение $\tau : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a,b]$, что функции $\phi_j(t) = \phi(t)$ и $\psi_j(t) = \psi(t)$, $t \in [t_{j-1}, t_j]$ удовлетворяют условиям $\phi_j, \psi_j \in C^1[t_{j-1}, t_j]$ для всех $1 \leq j \leq n$, $\gamma'(t) = \phi'(t) + i\psi'(t) \neq 0$ при $t \in [a,b] \setminus \{\cup_{j=0}^n t_j\}$, а в точках разбиения $\gamma'(t_{j-1}+0) = \phi'(t_{j-1}+0) + i\psi'(t_{j-1}+0) \neq 0$, $\gamma'(t_j - 0) = \phi'(t_j - 0) + i\psi'(t_j - 0) \neq 0$ при $1 \leq j \leq n$.

В каждом из случаев, параметризацию (3.1), удовлетворяющую перечисленным выше условиям, будем называть *допустимой* для γ.

Замкнутой жордановой кривой называется непрерывная замкнутая кривая без самопересечений. Из теоремы Жордана следует, что для любой замкнутой жордановой кривой γ существует такая ограниченная область $G \subset \mathbb{C}$, что $\partial G = \gamma$. Кусочно гладкую замкнутую жорданову кривую будем называть *простой замкнутой кривой*.

Мы не будем повторять определение криволинейных интегралов, оно уже дано в курсе математического анализа. Напомним только, что если кривая γ является кусочно гладкой с допустимой параметризацией (3.1) и функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вдоль γ, то

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left(P(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) + Q(\phi(t),\psi(t))\psi'(t)\right) dt. \tag{3.2}$$

$$\int_\gamma P(x,y)ds = \int_a^b P(\phi(t),\psi(t))|\gamma'(t)|dt. \tag{3.3}$$

Определение 15. Пусть γ является кусочно гладкой кривой и функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ непрерывна вдоль γ. *Интегралом от функции $f(z)$ по кривой γ* называется величина

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy. \tag{3.4}$$

Из свойств криволинейных интегралов сразу вытекают следующие три свойства интегралов от функции комплексного переменного (мы предполагаем, что все кривые являются кусочно гладкими, а функции непрерывными вдоль этих кривых):

1. Линейность. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz.$$

2. При изменении ориентации кривой интеграл меняет знак

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

3. Аддитивность. Пусть конец кривой γ_1 совпадает с началом кривой γ_2, $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2$. Тогда

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Свойство аддитивности позволяет определить интеграл от функции комплексного переменного вдоль объединения конечного числа кривых. Пусть $\Gamma = \cup_{j=1}^n \gamma_j$. Тогда

$$\int_\Gamma f(z)dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Очень часто в курсе будет встречаться случай, когда $\Gamma = \partial G$ для некоторой ограниченной области $G \subset \mathbb{C}$. Будем называть G *областью с простой границей*, если G ограничена и ∂G состоит из конечного числа простых замкнутых попарно не пересекающихся кривых. По соглашению будем считать, что ориентация каждой из этих кривых выбрана так, чтобы при обходе по ∂G область G оставалась слева. В частности, если γ — простая замкнутая кривая, G — ограниченная область, границей которой является γ, то ориентация кривой γ выбирается так, чтобы при обходе по ней область G оставалась слева.

Приведем удобную формулу для вычисления комплексных интегралов. Ниже будем считать, что если $h_1, h_2 \in C[a, b]$ и $h(t) = h_1(t) + ih_2(t)$, то

$$\int_a^b h(t)dt := \int_a^b h_1(t)dt + i\int_a^b h_2(t)dt.$$

Предложение 7. *Пусть γ является кусочно гладкой кривой с допустимой параметризацией (3.1) и функция f непрерывна вдоль γ. Тогда*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{3.5}$$

Доказательство. Преобразуем правую часть (3.5). Имеем

$$\begin{aligned} f(\gamma(t))\gamma'(t) =&(u(\phi(t),\psi(t)) + iv(\phi(t),\psi(t))(\phi'(t) + i\psi'(t)) = \\ =&(u(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) - v(\phi(t),\psi(t))\psi'(t)) + \\ &+ i(v(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) + u(\phi(t),\psi(t))\psi'(t)). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Так как

$$\int_a^b (u(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) - v(\phi(t),\psi(t))\psi'(t))dt = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy,$$

$$\int_a^b (v(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) + u(\phi(t),\psi(t))\psi'(t))dt = \int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy,$$

то формула (3.5) следует из формул (3.4), (3.6). □

Для комплексных интегралов, как и в действительном случае, справедлива формула Ньютона-Лейбница.

Предложение 8. *Пусть γ — кусочно гладкая кривая в области $D \subset \mathbb{C}$ с началом в точке z_1 и концом в точке z_2. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{O}(D)$ справедлива формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_\gamma f'(z)dz = f(z_2) - f(z_1). \tag{3.7}$$

В частности, если кривая γ замкнута, то $\int_\gamma f'(z)dz = 0$.

Доказательство. Пусть (3.1) — допустимая параметризация кривой γ. Из формулы (2.10) следует, что $(f(\gamma(t))' = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Поэтому

$$\begin{gathered} \int_\gamma f'(z)dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (f(\gamma(t))'dt = \\ = \int_a^b (u(\phi(t),\psi(t)))'dt + i\int_a^b (v(\phi(t),\psi(t)))'dt = \\ = (u(\phi(t),\psi(t)) + iv(\phi(t),\psi(t)))\,|_a^b = f(z_2) - f(z_1). \end{gathered}$$

□

Очень важный пример. Пусть $n \in \mathbb{Z}$, γ — окружность радиуса R с центром в точке a. Тогда

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{при} \quad n = -1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Так как γ является границей круга, то она обходится против часовой стрелки, следовательно $\gamma(t) = a + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Если $n \neq -1$, то $(z-a)^n = (\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1})'$ и, так как γ — замкнутая кривая и функция $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ голоморфна в окрестности кривой γ, то $\int_\gamma (z-a)^n dz = 0$.

Пусть $n = -1$. Тогда $\gamma'(t) = Rie^{it}$ и по формуле (3.5) получаем

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} Rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Предложение 9 (Оценка интеграла)**.** *Пусть функция f непрерывна вдоль кусочно гладкой кривой γ. Тогда*

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)| ds. \tag{3.9}$$

Доказательство. Пусть (3.1) — допустимая параметризация для γ. Положим $I := \int_\gamma f(z) dz$. Если I=0, то оценка (3.9) очевидна.

Иначе представим I в полярной форме $I = |I| e^{i\theta}$. По свойству линейности имеем

$$|I| = e^{-i\theta} \int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma e^{-i\theta} f(z) dz = \int_a^b e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Так как $|I| \in \mathbb{R}$, то

$$|I| = \mathrm{Re} \int_a^b e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t)) dt.$$

В правой части последнего выражения стоит интеграл от вещественной функции $g(t) = \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t))$. Пользуясь оценкой $\int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b |g(t)| dt$, получаем

$$|I| \leq \int_a^b |\,\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t))| dt \leq \int_a^b |(e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t))| dt =$$

$$= \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t))| dt = \int_\gamma |f(z)| ds$$

(в последнем равенстве мы воспользовались формулой (3.3)). □

Следствие 2. *Пусть функция f и кривая γ удовлетворяют условиям предыдущего предложения и $\max_{z\in\gamma} |f(z)| \leq M$. Тогда*

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq M|\gamma|, \tag{3.10}$$

где $|\gamma|$ — длина кривой γ.

3.2.1 Интеграл от функции комплексного переменного вдоль непрерывно дифференцируемой кривой.

Обобщим понятие интеграла от комплексной функции на более общий класс кривых.

Назовем кривую γ *непрерывно дифференцируемой*, если ее можно задать уравнением (3.1), где функции $\phi, \psi \in C^1[a, b]$.

Назовем кривую γ *кусочно непрерывно дифференцируемой*, если ее можно задать уравнением (3.1), где функции ϕ, ψ являются кусочно непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[a, b]$. Последнее значит, что $\phi, \psi \in C[a, b]$ и существует такое разбиение $\tau : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$, что функции $\phi_j(t) = \phi(t)$ и $\psi_j(t) = \psi(t)$, $t \in [t_{j-1}, t_j]$ удовлетворяют условиям $\phi_j, \psi_j \in C^1[t_{j-1}, t_j]$ для всех $1 \leq j \leq n$.

В каждом из случаев, параметризацию (3.1), удовлетворяющую перечисленным выше условиям, будем называть *допустимой* для γ.

Понятия непрерывно дифференцируемой и кусочно непрерывно дифференцируемой кривой являются более общими, чем понятия гладкой и кусочно гладкой кривой. Например, постоянная кривая $\gamma(t) = 0, t \in [a, b]$, является непрерывно дифференцируемой, но не является гладкой.

Пусть функция f непрерывна вдоль кусочно непрерывно дифференцируемой кривой γ с допустимой параметризацией (3.1). Тогда зададим $\int_\gamma f(z)dz$ формулой (3.5). Так определенный интеграл совпадает с уже заданным формулой (3.4) в случае, если кривая γ кусочно гладкая и удовлетворяет перечисленным выше свойствам интеграла вдоль кусочно-гладкой кривой.

3.3 Интегральная теорема Коши.

Следующая теорема играет фундаментальную роль в теории функций комплексного переменного.

Теорема 4. *Пусть D — область с простой границей и $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$. Тогда*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0. \tag{3.11}$$

Доказательство. По определению $\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\partial D} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\partial D} v(x,y)dx + u(x,y)dy$. Так как $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны вместе с частными производными и удовлетворяют условиям Коши-Римана (2.3) в некоторой окрестности множества $\overline{D}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Применяя формулу Грина к вещественным интегралам

$$\int_{\partial D} u(x,y)dx - v(x,y)dy, \quad \int_{\partial D} v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

и учитывая условия Коши-Римана, получаем

$$\int_{\partial D} u(x,y)dx - v(x,y)dy = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

$$\int_{\partial D} v(x,y)dx + u(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

следовательно, $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$. □

Замечание 3. Интегральная теорема Коши остается справедливой, если заменить условие $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$ на более общее $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$.

15. **Интегральная формула Коши для области с простой границей. Теорема о среднем для голоморфной функции.**

Теорема 6. *Пусть D является областью с простой границей, $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$, $z \in D$. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{3.12}$$

Доказательство. Так как D — открытое множество, то для достаточно малых δ точка z содержится в D вместе с некоторой δ-окрестностью $U_\delta(z)$. Пусть $\gamma_\delta = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| = \delta\}$ (напомним, что кривая γ_δ ориентирована против часовой стрелки). Рассмотрим область $D_\delta := \{\xi \in$

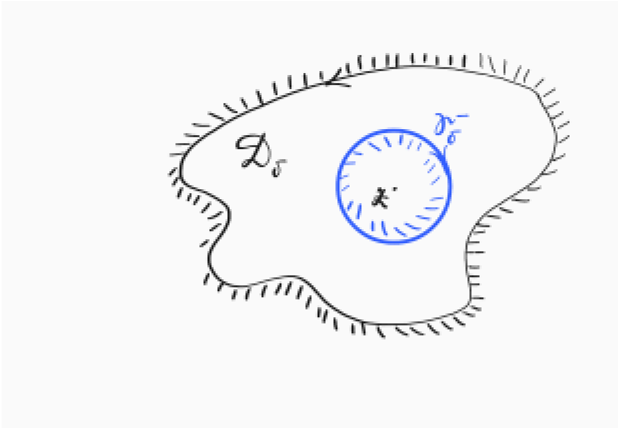


Рис. 3.2:

$D : |\xi - z| > \delta\}$ (см. рис. 3.2). Поскольку функция $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ голоморфна в замыкании области (D_δ), по интегральной теореме Коши получаем $\int_{\partial D_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$.

Так как $\partial D_\delta = \partial D \cup \gamma_\delta^-$, где кривая γ_δ^- уже ориентирована по часовой стрелке, то

$$0 = \int_{\partial D_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\gamma_\delta^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Поскольку $\int_{\gamma_\delta^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = -\int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$, получаем, что для достаточно малых δ справедливо равенство

$$\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{3.13}$$

Из (3.13) следует, что $\int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ не зависит от δ. Поэтому, чтобы доказать равенство (3.12), достаточно показать, что $\lim_{\delta \to 0+0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z)$.

Из формулы (3.8) следует, что $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi$. Следовательно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi.$$

Так как $|\gamma_\delta| = 2\pi\delta$ и $|\xi - z| = \delta$ при $\xi \in \gamma_\delta$, то по следствию 2 получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\xi \in \gamma_\delta} \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| \cdot |\gamma_\delta| = \\ = \max_{\xi \in \gamma_\delta} |f(\xi) - f(z)| \to 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

при $\delta \to 0 + 0$, поскольку функция f непрерывна в точке z. $\square$

Замечание 5. Интегральная формула Коши остается справедливой, если заменить условие $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$ на более общее $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$.

Следствие 3 (Теорема о среднем для голоморфных функций). *Пусть функция f голоморфна в круге $|z - z_0| < R$. Тогда для любого $r \in (0, R)$ значение функции f в центре круга $|z - z_0| < r$ равно среднему значению по границе этого круга, то есть*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt. \tag{3.15}$$

Доказательство. Положим $U_r(z_0) = \{|z - z_0| < r\}$. Так как $f \in \mathcal{O}(\overline{U_r(z_0)})$, то по интегральной формуле Коши (3.12) имеем $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$. Параметризуя границу круга $\partial U_r(z_0)$: $\xi = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $d\xi = rie^{it}$, получаем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

$\square$

16. **Определение интеграла типа Коши. Существование производных всех порядков у интеграла типа Коши. Голоморфность на области определения интеграла типа Коши.**

Пусть функция f непрерывна на кусочно гладкой кривой γ, $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.

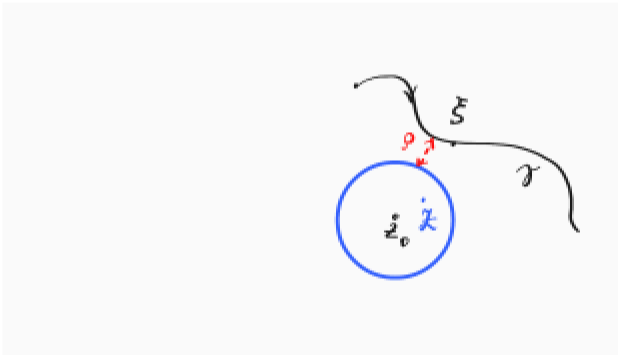


Рис. 4.1:

Определение 18. *Интегралом типа Коши* называется выражение

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi. \tag{4.1}$$

Предложение 13. *Пусть γ — кусочно гладкая кривая и $f \in C(\gamma)$. Тогда функция F, определенная в (4.1) голоморфна и бесконечно дифференцируема на множестве $\mathbb{C}\setminus\gamma$. При этом*

$$F^n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Зафиксируем точку $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma$ и индукцией по n покажем справедливость формулы (4.2) в точке z_0. Так как множество $\mathbb{C}\setminus\gamma$ открыто, то существует такое $\delta > 0$, что $\overline{U_\delta(z_0)} \subset \mathbb{C}\setminus\gamma$. Так как множества γ и $\overline{U_\delta(z_0)}$ замкнуты, то[1] $\rho := \mathrm{dist}(\gamma, \overline{U_\delta(z_0)}) > 0$ (см. рис. 4.1).

Из определения функции $F(z)$ получаем, что при $n = 0$ равенство (4.2) верно. Предположим, что равенство (4.2) выполнено при $n = m-1$, где $m \in \mathbb{N}$. Покажем, что оно выполняется и при $n = m$. Пусть $z \in U^0_\delta(z_0)$. Положим

$$\Delta_m(z) = \frac{F^{m-1}(z) - F^{m-1}(z_0)}{z - z_0} - \frac{m!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{m+1}}d\xi.$$

[1]Напомним, что расстоянием между множествами $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ называется величина $\mathrm{dist}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \inf_{\xi_1\in\mathcal{M}_1, \xi_2\in\mathcal{M}_2} |\xi_1 - \xi_2|$.

Из предположения индукции вытекает

$$
\begin{aligned}
\frac{F^{m-1}(z)-F^{m-1}(z_0)}{z-z_0} &= \frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{z-z_0}\left(\frac{1}{(\xi-z)^m}-\frac{1}{(\xi-z_0)^m}\right)d\xi. \\
&= \frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{z-z_0}\left(\frac{(\xi-z_0)^m-(\xi-z)^m}{(\xi-z)^m(\xi-z_0)^m}\right)d\xi.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Преобразуем выражение под интегралом. Имеем

$$
\begin{aligned}
(\xi-z_0)^m &= ((\xi-z)+(z-z_0))^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (z-z_0)^k(\xi-z)^{m-k} = \\
&= (\xi-z)^m + m(\xi-z)^{m-1}(z-z_0) + (z-z_0)^2P(\xi,z),
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

где

$$
P(\xi,z)=\begin{cases} 0, \quad \text{при} \quad m=1, \\ \sum_{k=2}^{m} C_m^k (z-z_0)^{k-2}(\xi-z)^{m-k}, \quad \text{при} \quad m>1. \end{cases}
$$

Поэтому

$$
(\xi-z_0)^m-(\xi-z)^m = m(\xi-z)^{m-1}(z-z_0)+(z-z_0)^2P(\xi,z). \tag{4.5}
$$

Подставив (4.5) в (4.3), получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{F^{m-1}(z)-F^{m-1}(z_0)}{z-z_0} = \\
&= \frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_\gamma f(\xi)\left(\frac{m}{(\xi-z)(\xi-z_0)^m}+\frac{(z-z_0)P(\xi,z)}{(\xi-z)^m(\xi-z_0)^m}\right)d\xi.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Следовательно, $\Delta_m(z)=(z-z_0)\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_\gamma f(\xi)g_m(\xi,z)d\xi$, где

$$
g_m(z)=\frac{m}{(\xi-z)(\xi-z_0)^{m+1}}+\frac{P(\xi,z)}{(\xi-z)^m(\xi-z_0)^m}.
$$

Поскольку $z\in U_\delta^0(z_0)\subset\overline{U_\delta(z_0)}$, $\xi\in\gamma$ (см. рис.), имеем $|\xi-z|\geq\rho$ и $|\xi-z_0|\geq\rho$. Многочлен P непрерывен, следовательно, и ограничен на компакте $\gamma\times\overline{U}_\delta(z_0)$. Поэтому функция $g_m(\xi,z)$ тоже ограничена на этом компакте. Также функция f ограничена в силу непрерывности на кривой γ. Используя оценку (3.10), для любого $z \in U_\delta^0(z_0)$, получаем

$$|\Delta_m(z)| \le |z - z_0| \frac{(m-1)!}{2\pi} \max_{\xi \in \gamma, z \in \overline{U}_\delta(z_0)} |f(\xi) g_m(\xi, z)| \cdot |\gamma| \to 0$$

при $z \to z_0$. □

Замечание 6. Из свойства аддитивности интеграла следует, что предыдущее предложение останется в силе, если вместо кривой γ взять объединение конечного числа кусочно гладких кривых.

Замечание 7. Отметим, что выражение (4.1) является собственным интегралом, зависящим от параметра. Для вычисления производных таких интегралов справедливы формулы, аналогичные приведенным в курсе математического анализа, из которых сразу следует равенство (4.2). Однако нам было удобнее привести непосредственное доказательство этого равенства.

В качестве следствия интегральной формулы Коши и предыдущего предложения, получаем, что голоморфные функции бесконечно дифференцируемы.

Предложение 14. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{O}(D)$. Тогда функция f бесконечно дифференцируема в D. Более того, в произвольном круге $U_r(a) \Subset D$ производные функции f удовлетворяют соотношениям*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial U_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Если дополнительно предположить, что D является областью с простой границей и $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$, то производные функции f в области D удовлетворяют соотношениям

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

Доказательство. По условию $f \in \mathcal{O}(\overline{U_r(a)})$. Поэтому из интегральной формулы Коши (3.12) функция f представляется в круге $U_r(a)$ интегралом типа Коши, а именно

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi.$$

Следовательно, равенство (4.7) следует из формулы (4.2). При дополнительных ограничениях на функцию f равенства (4.8) непосредственно вытекают из интегральной теоремы Коши и формулы (4.2). □

17. **Бесконечная дифференцируемость голоморфной в области D функции, формулы для производных.**

(СМОТРЕТЬ ПРЕДЫДУШИЙ)

18. **Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры.**

4.2 Теорема Лиувилля, доказательство основной теоремы алгебры

Определение 19. Функция, голоморфная во всей комплексной плоскости, называется *целой*.

Следующее очень красивое утверждение имеет многочисленные применения в курсе комплексного анализа.

Теорема 7 (Теорема Лиувилля). *Пусть целая функция f ограничена на всей комплексной плоскости. Тогда f постоянна.*

Доказательство. По условию существует такое число $M > 0$, что $|f(z)| \leq M$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Применяя формулу (4.7) для произвольного круга $U_r(z)$ при $n = 1$, получаем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(z)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi. \tag{4.9}$$

Оценим $|f'(z)|$, используя (3.10). Так как $|\xi - z| = r$ при $\xi \in \partial U_r(z)$, и длина окружности $\partial U_r(z)$ равна $2\pi r$, то из формулы (3.10) для оценки интеграла (4.9) имеем

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r} \to 0$$

при $r \to \infty$. Таким образом, $f'(z) \equiv 0$, следовательно, f является постоянной функцией. $\square$

Следствие 4 (Основная теорема алгебры). *Любой непостоянный многочлен $P(z)$ имеет комплексный корень.*

Доказательство. По условию $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, где $n \geq 1$ и $a_n \neq 0$. Так как $|P(z)| \geq |a_n| \cdot |z|^n - (|a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |a_0|)$, то $\lim_{z \to \infty} |P(z)| = \infty$.

Предположим, от противного, что $P(z)$ не имеет корней. Тогда функция $Q(z) = \frac{1}{P(z)}$ является целой. Покажем, что $Q(z)$ ограничена. Так как $\lim_{z\to\infty} Q(z) = \frac{1}{\lim_{z\to\infty} P(z)} = 0$, то существует такое $R > 0$, что $|Q(z)| < 1$ при $|z| > R$. Также $Q(z)$ непрерывна, поэтому и ограничена на компакте $|z| \leq R$, следовательно, существует такое $M > 0$, что $|Q(z)| \leq M$ при $|z| \leq R$. Поэтому $|Q(z)| \leq \max(M, 1)$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

Таким образом, $Q(z)$ — целая ограниченная функция. Из теоремы Лиувилля следует, что $Q(z)$ постоянна. Но тогда и $P(z)$ постоянна, что противоречит условию. □

19. **Первообразная ф.к.п. Достаточное условие существования первообразной для непрерывной в круге ф.к.п.**

По аналогии с действительным случаем вводится определение первообразной непрерывной функции комплексного переменного.

Определение 20. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область и $f \in C(D)$. Функция $F \in \mathcal{O}(D)$ называется *первообразной функции f в области D*, если $F'(z) = f(z)$ для любой точки $z \in D$.

Как и в курсе математического анализа, справедливо следующее утверждение.

Предложение 15. *Пусть функция F_1 является первообразной функции f в области D. Тогда функция F_2 является первообразной функции f в области D $\iff$ существует такое число $C \in \mathbb{C}$, что $F_2(z) = F_1(z) + C$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть F_2 является первообразной функции f в области D. Положим $F(z) = F_1(z) - F_2(z)$. Тогда $F' \equiv 0$ всюду в области D. Представим $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Из соотношений (2.4), получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ всюду в D. Поэтому, по теореме из курса математического анализа, получаем, что функция $F(z)$ постоянна в D.

Достаточность очевидна. □

Из курса математического анализа известно, что любая функция, непрерывная на отрезке, имеет на нем первообразную. Однако непрерывности функции комплексного переменного уже недостаточно для существования первообразной. Действительно, если функция F является первообразной непрерывной функции f в области D, то $F \in \mathcal{O}(D)$, следовательно, F бесконечно дифференцируема в D. Так как $f = F'$, то и $f \in \mathcal{O}(D)$. Таким образом, **функция, имеющая первообразную в области, является голоморфной в этой области**.

Найдем необходимые и достаточные условия существования первообразной. Для любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, назовем *открытым треугольником с вершинами* A, B, C область Δ, ограниченную треугольником ABC. Докажем вспомогательное утверждение.

Предложение 16. *Пусть $f \in C(U_r(a))$, причем для любых двух точек z_1, $z_2 \in U_r(a)$ справедливо равенство*

$$\int_{[a,z_1]} f(\xi)d\xi + \int_{[z_1,z_2]} f(\xi)d\xi + \int_{[z_2,a]} f(\xi)d\xi = 0. \tag{4.10}$$

Тогда $f \in \mathcal{O}(U_r(a))$ и функция $F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi$ является первообразной функции f в круге $U_r(a)$ (здесь $[a, z_1]$ — отрезок с началом в точке a и концом в точке z, аналогично определяются два остальных отрезка[2]).

Доказательство. Рассмотрим любую точку $z_0 \in U_r(a)$ и покажем, что $F'(z_0) = f(z_0)$. Беря $z_1 = z_0$, $z_2 = z \in U_r(a)$ в равенстве (4.10), получаем

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(\xi)d\xi.$$

Из формулы Ньютона-Лейбница (3.7) имеем $\int_{[z_0,z]} d\xi = z - z_0$. Таким образом

$$\Delta(z) := \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} \left(f(\xi) - f(z_0)\right) d\xi. \tag{4.11}$$

Используя оценку (3.10) и непрерывность функции f, получаем

$$|\Delta(z)| \leq \max_{\xi \in [z_0,z]} |f(\xi) - f(z_0)| \to 0$$

при $z \to z_0$. Тем самым F является первообразной для f и, следовательно, $f \in \mathcal{O}((U_r(a))$. □

[2]Если точки a, z_1, z_2 лежат на одной прямой, то условие (4.10) автоматически следует из свойства аддитивности интеграла. Если же точки a, z_1, z_2 не лежат на одной прямой, то условие (4.10) означает, что интеграл от функции f по границе открытого треугольника с вершинами a, z_1, z_2 равен нулю.

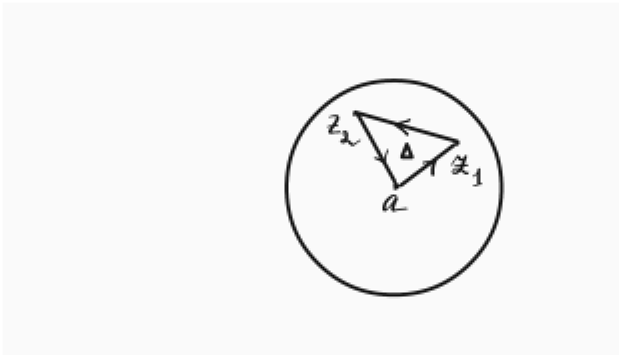


Рис. 4.2:

Следствие 5. *Любая функция f, голоморфная в открытом круге $U_r(a)$, имеет в нем первообразную $F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{O}(U_r(a))$. Возьмем любые две точки z_1, $z_2 \in U_r(a)$. Если точки z_1, z_2 и a лежат на одной прямой, то условие (4.10) следует из свойства аддитивности интеграла. Иначе рассмотрим открытый треугольник Δ с вершинами в этих точках (см. рис. 4.2). Так как $\overline{\Delta} \subset U_r(a)$, то по интегральной теореме Коши имеем $\int_{\partial\Delta} f(\xi)d\xi = 0$, что влечет равенство (4.10). Далее нужно воспользоваться предыдущим предложением. □

Приведем необходимые и достаточные условия существования первообразной в случае произвольной области.

Предложение 17. *Пусть функция f голоморфна в области D. Тогда f имеет первообразную в D $\iff$ для любой замкнутой кусочно гладкой кривой γ, лежащей в области D справедливо равенство $\int_\gamma f(\xi)d\xi = 0$. При этом для любой точки $z_0 \in D$ функция*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi, \tag{4.12}$$

где интеграл берется по любой кусочно гладкой кривой с началом в точке z_0 и концом в точке z, является первообразной функции $f(z)$ в области D.

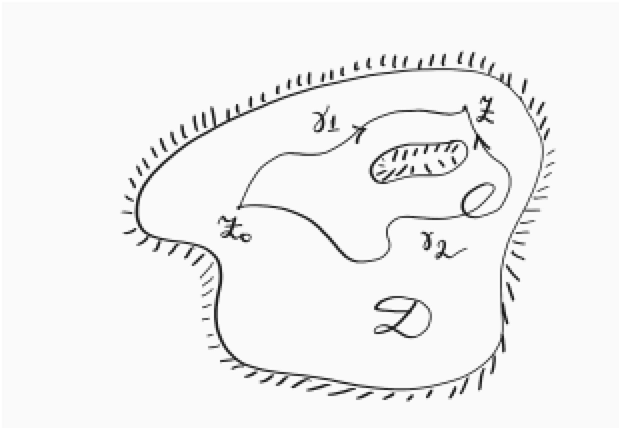


Рис. 4.3:

Доказательство. Необходимость. Пусть функция F является первообразной для f и γ — произвольная кусочно гладкая кривая, лежащая в D, с началом и концом в точке z_0. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_\gamma f(\xi)d\xi = \int_\gamma F'(\xi)d\xi = F(z_0) - F(z_0) = 0.$$

Достаточность. Пусть интеграл от функции f по любой замкнутой кусочно гладкой кривой, лежащей в области D равен нулю. Тогда функция F из (4.12) определена корректно, так как для любых кусочно гладких кривых γ_1 и γ_2, лежащих в D, с общим началом z_0 и общим концом z кривая $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2{}^-$ является замкнутой кусочно гладкой, поэтому $\int_{\gamma_1} f(\xi)d\xi - \int_{\gamma_2} f(\xi)d\xi = \int_\gamma f(\xi)d\xi = 0$, следовательно, $\int_{\gamma_1} f(\xi)d\xi = \int_{\gamma_2} f(\xi)d\xi$ (см. рис. 4.3).

Проверим, что функция F является первообразной для f в любом круге $U_r(a) \subset D$. Действительно, представим

$$F(z) = \int_{z_0}^a f(\xi)d\xi + \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi.$$

Так как $\int_{z_0}^a f(\xi)d\xi$ — константа, а функция $\int_{[a,z]} f(\xi)d\xi$ является первообразной функции f в круге $U_r(a)$ по следствию 5, то и функция F является первообразной для f в круге $U_r(a)$. $\square$

Покажем, что в области произвольного вида уже не всякая голоморфная функция имеет первообразную.

Пример. Пусть $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, γ — окружность единичного радиуса с центром в нуле. Из (3.8) имеем $\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi} = 2\pi i \neq 0$, поэтому функция f не имеет первообразной в области D.

Следующее утверждение приведем без доказательства.

Предложение 18. *Любая функция, голоморфная в односвязной области, имеет в ней первообразную.*

Из предложения 16 следует очень важное достаточное условие голоморфности.

Теорема 8 (Теорема Мореры)**.** *Пусть функция f непрерывна в области D и интеграл от функции f по границе любого открытого треугольника, компактно принадлежащего области D, равен нулю. Тогда $f \in \mathcal{O}(D)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что функция f голоморфна в любом открытом круге $U_r(a) \subset D$. По условию, для любых двух точек z_1, $z_2 \in U_r(a)$ справедливо равенство (4.10). Поэтому функция f имеет первообразную в круге $U_r(a)$ в силу предложения 16. Следовательно $f \in \mathcal{O}(U_r(a))$. $\square$

20. **Критерий существования первообразной непрерывной в области D функции. Пример.**

См 19

21. **Существование первообразной у голоморфной в односвязной области функции. Теорема Мореры.**

Утв 3

Пусть $f \in \mathcal{O}(D)$, D — односвязная обл-ть. Тогда $\exists F(z)$ — перв-я $f(z)$ в D.

Д-во. Т.к. D односв., то $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$,

$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$, где $\int$ берётся от z_0 до z по $\forall$ кус. гл. кривой $\subset D$ не зав от пути (инт-я теорема Коши.

$\Rightarrow F(z)$ кор-но опр. В т. 1. доказали: $F'(z) = f(z)$.

Теорема 2 (теорема Мореры)

Пусть $f \in C(D)$ (D — обл-ть) : $\int\limits_{\partial\Delta} f(\xi)\,d\xi = 0$ $\forall$ треуг-ка $\Delta \subset \mathbb{C}$: $\overline{\Delta} \subset D$. Тогда $f \in \mathcal{O}(D)$.

Д-во. Достаточно док-ть $\forall U_R(a) \subset D$, $f \in \mathcal{O}(U_R(a))$.

Рассм. $\forall U_R(a)$. $\int\limits_{\partial\Delta} f(\xi)\,d\xi = 0$, $\Delta \subset U_R(a)$. Рассм. Δ, как в утв 2:

$$\int\limits_{[a,z_0]} f(\xi)\,d\xi + \int\limits_{[z_0,z]} f(\xi)\,d\xi + \int\limits_{[z,a]} f(\xi)\,d\xi = 0 \Rightarrow (1) \text{ вып-но.}$$

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}(U_R(a)) \Rightarrow f \in \mathcal{O}(D)$.

22. **Функциональные ряды на комплексной плоскости, их свойства.**

Поточечная и равномерная сходимость ряда функций комплексного переменного определяется так же, как и в курсе математического анализа. Пусть каждая из функций $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$ определена на множестве E.

Тогда на множестве E определен ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \tag{5.1}$$

частичные суммы которого будем обозначать $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$.

Определение 23. Ряд (5.1) называется *сходящимся* на множестве E к сумме $S(z)$, если $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ в каждой точке $z \in E$.

Определение 24. Ряд (5.1) называется *равномерно сходящимся* на множестве E к сумме $S(z)$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq \mathbb{N}$ и всех $z \in E$ справедливо неравенство

$$|S(z) - S_n(z)| < \epsilon. \tag{5.2}$$

Точно так же, как и в курсе математического анализа показывается, что ряд (5.1) сходится равномерно к сумме $S(z) \iff \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in E} |S(z) - S_n(z)| = 0$.

Из определения сразу следуют свойства равномерно сходящихся рядов:

1. Пусть ряд (5.1) сходится равномерно на множестве E к сумме $S(z)$. Тогда он сходится равномерно к $S(z)$ на любом подмножестве $E_1 \subset E$.

2. Пусть ряд (5.1) сходится равномерно на каждом из множеств E_j, $1 \leq j \leq n$ к сумме $S(z)$. Тогда он сходится равномерно к $S(z)$ и на их объединении $\cup_{j=1}^{n} E_j$.

3. Пусть ряд (5.1) сходится равномерно на множестве E к сумме $S(z)$ и функция $g(z)$ ограничена на множестве E. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)g(z)$ сходится равномерно на множестве E к сумме $S(z)g(z)$.

Представим

$$u_n(x,y) = \operatorname{Re} f_n(x,y), \quad v_n(x,y) = \operatorname{Im} f_n(x,y),$$

$$S_n^1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x,y), \quad S_n^2(x,y) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x,y),$$

$$S^1(x,y) = \operatorname{Re} S(z), \quad S^2(x,y) = \operatorname{Im} S(z).$$

Используя для каждого $n \in \mathbb{N}$, как и раньше, двойное неравенство

$$\max(|S_n^1(x,y)-S^1(x,y)|,|S_n^2(x,y)-S^2(x,y)|)\leq|S_n(z)-S(z)|\leq$$
$$\leq|S_n^1(x,y)-S^1(x,y)|+|S_n^2(x,y)-S^2(x,y)|,$$

получаем, что справедливо

Предложение 23. *Ряд* (5.1) *сходится равномерно на множестве* E *к сумме* $S(z)$ $\iff$ *ряды из действительных функций* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x,y)$ *сходятся равномерно на множестве* E *к суммам* $S^1(x,y)$ *и* $S^2(x,y)$ *соответственно.*

Поэтому из критерия Коши и признака Вейерштрасса равномерной сходимости действительных рядов на множестве E вытекают

Критерий Коши равномерной сходимости ряда функций комплексного переменного. Ряд (5.1) сходится равномерно на множестве E $\iff$ для любого $\epsilon>0$ существует такое $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$, что для всех $n\geq N$, $p\in\mathbb{N}$ и $z\in E$ справедливо неравенство

$$|f_{n+1}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|<\epsilon.$$

Признак Вейерштрасса. Если существует такой сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$, что для всех $n\in\mathbb{N}$ и $z\in E$ справедливо неравенство $|f_n(z)|\leq p_n$, то ряд (5.1) сходится равномерно на множестве E.

Из предложения 23 и функциональных свойств действительных рядов следуют

Функциональные свойства равномерно сходящихся комплексных рядов.

1. Пусть ряд (5.1) равномерно сходится на множестве E к сумме $S(z)$ и $f_n\in C(E)$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда $S\in C(E)$.

2. Пусть каждая из функций f_n, $n\in\mathbb{N}$, непрерывна вдоль кусочно гладкой кривой γ и ряд (5.1) сходится равномерно на γ к сумме $S(z)$. Тогда этот ряд допускает почленное интегрирование вдоль γ, то есть

$$\int_{\gamma}S(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\gamma}f_n(z)dz. \tag{5.3}$$

Нужно сказать, что равномерная сходимость ряда из непрерывных функций на всем множестве E является лишь достаточным условием непрерывности суммы ряда на множестве E. Во многих очень важных для нас случаях ее нет. Поэтому введем более гибкое понятие равномерной сходимости внутри области.

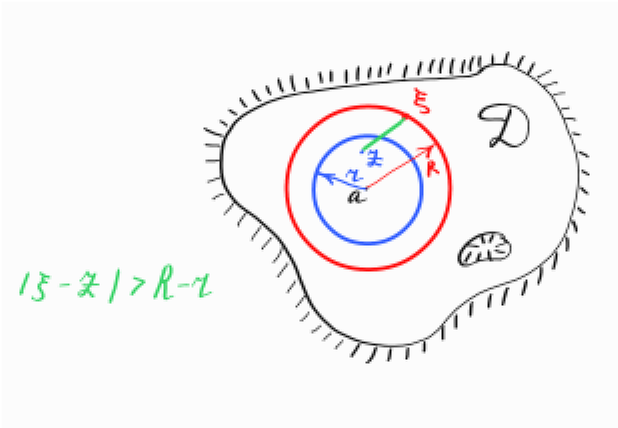


Рис. 5.1:

23. **Первая теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.**

Определение 25. Ряд (5.1), определенный в области D называется *равномерно сходящимся внутри* D, если этот ряд сходится равномерно на любом множестве $E \Subset D$.

Теорема 9 (Первая теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций)**.** *Пусть ряд (5.1) сходится равномерно внутри области D и все члены ряда являются голоморфными функциями. Тогда сумма $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ также голоморфна в D и для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо разложение*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \tag{5.4}$$

причем ряд в правой части (5.4) сходится равномерно внутри D.

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольный открытый круг $U_r(z_0) \Subset D$. Покажем, что $f \in \mathcal{O}(U_r(z_0))$. Тогда, в силу произвольности $U_r(z_0)$, получим, что $f \in \mathcal{O}(D)$. По условию ряд (5.1) сходится равномерно в $U_r(z_0)$, следовательно, $f \in C(U_r(z_0))$. Так как $f_n \in \mathcal{O}(U_r(z_0))$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то для любого открытого треугольника $\Delta \Subset U_r(z_0)$ в силу интегральной теоремы Коши имеем $\int_{\partial\Delta} f_n(\xi)d\xi = 0$. Из равномерной сходимости ряда (5.1) на границе треугольника следует возможность почленного интегрирования

$$\int_{\partial\Delta} f(\xi)d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(\xi)d\xi = 0.$$

Отсюда, по теореме Мореры, $f \in \mathcal{O}(U_r(z_0))$.

2. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Сперва покажем, что ряд в правой части (5.4) сходится равномерно к $f^{(k)}(z)$ в любом открытом круге $U_r(a) \Subset D$ Поскольку $U_r(a) \Subset D$, существует такое $R > r$, что $U_R(a) \Subset D$. Так как $f \in \mathcal{O}(D)$, то $f \in \mathcal{O}(\overline{U_R(a)})$ и из формул (4.7) в точках $z \in U_r(a)$ имеем

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial U_R(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi, \quad f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial U_R(a)} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi. \tag{5.5}$$

Отметим, что $|\xi - z| > R - r$ при всех $\xi \in \partial U_R(a)$, $z \in U_r(a)$ (см. рис. 5.1). Поэтому, учитывая равномерную сходимость ряда (5.1) на окружности $\partial U_R(a)$, получаем

$$\left| f^{(k)}(z) - \sum_{j=1}^{n} f_n^{(k)}(z) \right| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\partial U_R(a)} \frac{f(\xi) - \sum_{j=1}^{n} f_j(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \right| \leq$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{\sup_{\xi \in \partial U_R(a)} \left| f(\xi) - \sum_{j=1}^{n} f_j(\xi) \right|}{(R - r)^{k+1}} 2\pi R.$$

Это выражение не зависит от z и стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу равномерной сходимости ряда (5.1) на окружности $\partial U_R(a)$. Поэтому ряд в правой части (5.4) сходится равномерно в круге $U_r(a)$.

Покажем теперь, что ряд в правой части (5.4) сходится равномерно на любом множестве $Q \Subset D$. В силу компактности множества $\overline{Q}$, существует конечное число кругов $U_{r_j}(z_j) \Subset D$, $1 \leq j \leq m$ такое, что $\overline{Q} \subset \cup_{j=1}^{m} U_{r_j}(z_j)$. Из равномерной сходимости ряда на каждом из этих кругов, получаем, что он сходится равномерно на их объединении $\cup_{j=1}^{m} U_{r_j}(z_j)$, а значит и на множестве Q.

$\square$

24. **Степенные ряды на к.п. Теорема Коши – Адамара. Равномерная сходимость внутри круга, почленное интегрирование и дифференцирование в круге сходимости.**

Определение 26. Пусть $\{a_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ — произвольная последовательность комплексных чисел, $a \in \mathbb{C}$. Выражение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{5.6}$$

называется *степенным рядом с центром в точке* a. Число

$$R = \left(\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \in [0, +\infty] \tag{5.7}$$

называется *радиусом сходимости* ряда (5.6). Круг $U_R(a)$ называется *кругом сходимости* ряда (5.6). Формула (5.7) для нахождения радиуса сходимости называется *формулой Коши-Адамара*.

Точно так же, как и в курсе математического анализа доказывается

Теорема 10 (Теорема Коши-Адамара). *Ряд* (5.6) *сходится абсолютно при* $z \in U_R(a)$ *и расходится при* $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(a)}$.

Следующее утверждение тоже аналогично приведенному в курсе математического анализа.

Предложение 24. *Степенной ряд* (5.6) *сходится равномерно внутри своего круга сходимости.*

Доказательство. Пусть $Q \Subset U_R(a)$. Тогда существует такое $r \in (0, R)$, что $Q \subset \overline{U_r(a)}$. По теореме Коши-Адамара, ряд (5.6) сходится абсолютно в точке $a + r$, следовательно, сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Так как для любого $z \in Q$ имеем $|z - a| \leq r$, то $|a_n(z-a)^n| \leq |a_n| r^n$, поэтому ряд (5.6) сходится равномерно на множестве Q по признаку Вейерштрасса. □

Далее считаем, что радиус R сходимости ряда (5.6) отличен от нуля. Тогда в круге $U_R(a)$ определена функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$.

Из предыдущего предложения вытекает

Следствие 7 (Почленное интегрирование степенного ряда). *Для любого* $z \in U_R(a)$ *справедливо представление*

$$\int_a^z f(\xi) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1}, \tag{5.8}$$

где интегрирование ведется по любой кусочно гладкой кривой γ, *лежащей в круге* $U_R(a)$ *с началом в точке* a *и концом в точке* z.

Доказательство. Так как γ — компакт, то из предыдущего предложения получаем, что ряд (5.6) сходится равномерно на γ. Поэтому формула (5.8) получается почленным интегрированием ряда (5.6). □

Первая теорема Вейерштрасса влечет

Следствие 8 (Почленное дифференцирование степенного ряда)**.** *Сумма степенного ряда (5.6) голоморфна в его круге сходимости. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ справедливо представление*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}. \qquad (5.9)$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным в курсе математического анализа, получаем, что радиусы сходимости рядов в правой части формул (5.8), (5.9) также равны R.

26. Теорема Тейлора о разложении голоморфной функции в степенной ряд. Примеры.

Определение 27. Пусть $f \in \mathcal{O}(a)$[1]. Степенной ряд

$$f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad (5.10)$$

называется *рядом Тейлора функции f с центром в точке a.*

Предложение 25. *Пусть f является суммой ряда (5.6) с радиусом сходимости $R \neq 0$. Тогда ряд (5.6) является рядом Тейлора функции f с центром в точке a и для любого $r \in (0, R)$ справедливы равенства*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi, \quad n = 0, 1, \ldots. \qquad (5.11)$$

Доказательство. Подставив $z = a$ в формулы (5.6), (5.9), получаем $f(a) = a_0$, $f^{(k)}(a) = k!a_k$, следовательно, ряд (5.6) совпадает с рядом (5.10). Поэтому равенства (6.7) следуют из (4.7). $\square$

Следствие 9 (Единственность разложения в степенной ряд)**.** *Если функция f голоморфна в круге $U_r(a)$ и задается в нем сходящимся степенным рядом*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n,$$

то этот ряд является рядом Тейлора функции f с центром в точке a.

[1] Напомним, что $f \in \mathcal{O}(a)$, если функция f голоморфна в некоторой окрестности точки a.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ и $F(z)$ — сумма этого ряда в точках круга $U_R(a)$. Согласно условию, $r \leq R$. Так как $F(z) = f(z)$ в круге $U_r(a)$, то $b_n = \frac{F^{(n)}(a)}{n!} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, следовательно, данный ряд является рядом Тейлора функции f с центром в точке a. □

Предложение 26 (Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда). *Пусть $R \neq 0$ является радиусом сходимости ряда* (5.6), *а f — его суммой. Для $r \in (0, R)$ положим $M(r) = \max_{\xi \in \partial U_r(a)} |f(\xi)|$. Тогда коэффициенты ряда* (5.6) *удовлетворяют неравенствам Коши:*

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}. \tag{5.12}$$

Доказательство. Оценим интеграл в (6.7) с помощью (3.9):

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}.$$

□

Теорема 11 (Теорема Тейлора о разложении голоморфной функции в степенной ряд). *Пусть функция f голоморфна в области D и $U_r(a) \subset D$. Тогда ряд Тейлора функции f с центром в точке a сходится к функции f в круге $U_r(a)$.*

Доказательство. Зафиксируем точку $z \in U_r(a)$ и число $\rho \in (|z-a|, r)$. Так как $f \in \mathcal{O}(\overline{U_\rho(a)})$, то из интегральной формулы Коши (3.12) получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Положим $M(\rho) = \max_{\xi \in \partial U_\rho(a)} |f(\xi)|$. Поскольку в точках $\xi \in \partial U_\rho(a)$ справедлива оценка $|z-a| < \rho = |\xi - a|$ (см. рис 5.2), подынтегральное выражение раскладывается в геометрическую прогрессию

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{f(\xi)}{\xi - a} \left(1 - \frac{z-a}{\xi - a}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}. \tag{5.13}$$

Так как

$$\max_{\xi \in \partial U_\rho(a)} \left| \frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M(\rho)}{\rho} \left(\frac{|z-a|}{\rho} \right)^n,$$

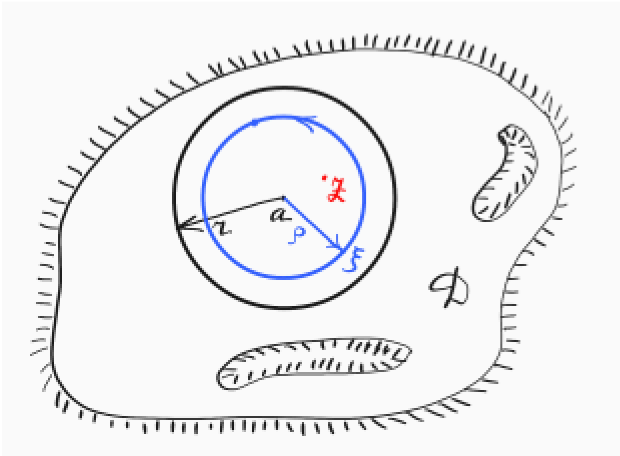


Рис. 5.2:

то ряд в правой части (5.13) сходится равномерно (относительно параметра ξ) на окружности $\partial U_\rho(a)$ по признаку Вейерштрасса, ибо он мажорируется сходящейся и не зависящей от параметра ξ геометрической прогрессией.

Поэтому ряд (5.13) допускает почленное интегрирование, следовательно

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

что и требовалось доказать. (Последнее равенство следует из формул (4.7)). $\square$

Из теоремы Тейлора следует, что ряды Тейлора целых функций сходятся к ним на всей комплексной плоскости. Таким образом, например, получаем, что разложения

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

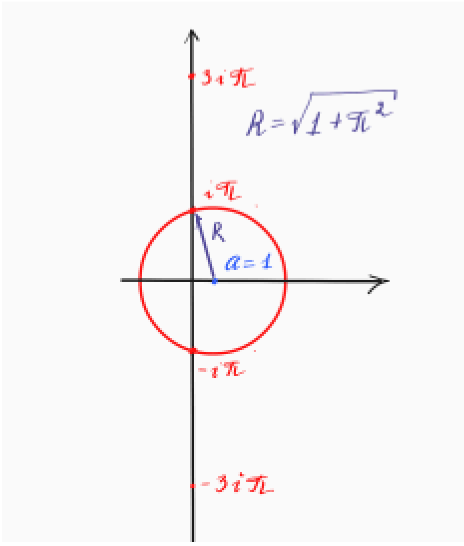


Рис. 5.3:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

справедливы при всех $z \in \mathbb{C}$.

Теорема Тейлора позволяет также найти радиус сходимости ряда Тейлора, не проводя самого разложения.

Пример. Найти радиус сходимости ряда Тейлора функции $f(z) = \frac{e^{\cos z}}{e^z+1}$ с центром в точке $a = 1$.

Функция $f(z)$ является голоморфной в области $D = \mathbb{C}\backslash\{i\pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}\}$. Следовательно, по теореме Тейлора функция $f(z)$ разложима в ряд Тейлора в любом круге $U_r(a)$, содержащемся в области D. Поскольку $\lim_{z\to i\pi(2k+1)} f(z) = \infty$, круг сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$ не содержит точек $i\pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}$. Круг максимального радиуса с центром $a = 1$, обладающий таким свойством, имеет радиус $\sqrt{1+\pi^2}$ (см. рис. 5.3). Поэтому искомый радиус равен $\sqrt{1+\pi^2}$.

27. Нули голоморфных функций, их свойства. Лемма о единственности голоморфной функции в круге.

Предложение 27. *Пусть функция $f \in \mathcal{O}(a)$, $f(a) = 0$ и f не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки a. Тогда:*

а) существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^{(n)}(a) \neq 0$, $f^{(k)}(a) = 0$ при всех натуральных k меньших n;

б) в некотором круге $U_r(a)$ справедливо представление

$$f(z) = (z-a)^n g(z), \tag{5.14}$$

где функция g голоморфна в круге $U_r(a)$ и отлична от нуля всюду в этом круге.

Доказательство. а) По условию $f \in \mathcal{O}(U_\rho(a))$ для некоторого $\rho > 0$. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ — ряд Тейлора функции f с центром в точке a. По теореме Тейлора, в точках $z \in U_\rho(a)$ этот ряд сходится к $f(z)$ и, поскольку функция f непостоянна в круге $U_\rho(a)$, то не все коэффициенты ряда равны нулю. Так как $f(a) = 0$, то $a_0 = 0$. Тогда число $n = \min\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\}$ — искомое.

б) При $z \in U_\rho(a)$ имеем

$$\begin{aligned} f(z) =& a_n(z-a)^n + a_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots = (z-a)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^{k-n} = \\ =& (z-a)^n g(z), \quad \text{где} \quad g(z) = a_n + a_{n+1}(z-a) + \dots . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Из равенства (5.15) следует, что ряд $a_n + a_{n+1}(z-a) + \dots$ сходится в круге $U_\rho(a)$, поэтому его радиус сходимости не меньше ρ и его сумма $g(z)$ голоморфна, а значит и непрерывна в круге $U_\rho(a)$. Так как $g(a) = a_n \neq 0$, то существует такое $r \in (0, \rho]$, что $g(z) \neq 0$ в точках круга $U_r(a)$. □

$z \in K_{r,R}$. Так как $f(z) = F(z)$ при $z \in K_{r_1,r_2}(a)$, то для любого $\rho \in (r_1, r_2)$ в силу (6.5) при $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(a)} \frac{F(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi.$$

□

Определение 28. Пусть функция $f \in \mathcal{O}(a)$, $f(a) = 0$ и f не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки a. Число

$$n = \min\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

называется *порядком нуля* функции f в точке a.

Следствие 10 (Изолированность нулей голоморфной функции)**.** *Пусть функция f голоморфна в области D и обращается в нуль в некоторой точке $a \in D$. Тогда существует такой круг $U_r(a) \subset D$, что либо функция f тождественно равна нулю в этом круге, либо $f(z) \neq 0$ при $z \in U_r^0(a)$.*

Лемма 1 (Лемма об открыто-замкнутом множестве). *Пусть V — такое непустое подмножество области D, что:*

а) V открыто,

б) V замкнуто в D, то есть для любой последовательности $\{z_n\} \subset V$, сходящейся к числу $z_0 \in D$ выполняется включение $z_0 \in V$.

Тогда $V = D$.

Доказательство. Так как $V \neq \emptyset$, то существует точка $z_1 \in V$. Допустим от противного, что $V \neq D$. Возьмем точку $z_2 \in D \setminus V$. Так как область является линейно связным множеством, то существует кривая $\gamma : [a, b] \to D$ с началом $\gamma(a) = z_1$ и концом $\gamma(b) = z_2$. Построим последовательность вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \cdots \supset [a_n, b_n] \ldots$$

по следующему правилу:

1) $a_1 = a$, $b_1 = b$. Тем самым $\gamma(a_1) \in V$, $\gamma(b_1) \in D \setminus V$.

2) Если $\gamma(\frac{a_n+b_n}{2}) \in V$, то $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$. Иначе $a_{n+1} = a$, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

По построению $\gamma(a_k) \in V$, $\gamma(b_k) \in D \setminus V$, $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. По теореме из математического анализа о вложенных отрезках, длины которых стремятся к нулю, получаем, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к одному и тому же числу $c \in [a, b]$. Пусть $z_0 = \gamma(c)$ (см. рис. 5.4). Поскольку кривая γ непрерывна, последовательности $\{\gamma(a_n)\}$ и $\{\gamma(b_n)\}$ сходятся к z_0.

[2]т.е. для любого $\rho > 0$ пересечение $E \cap U^0_\rho(a)$ непусто.

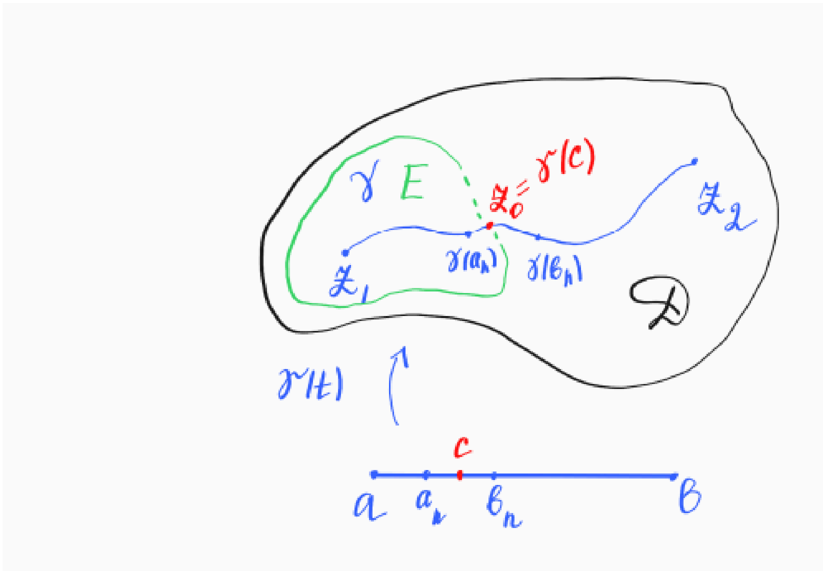


Рис. 5.4:

Так как V замкнуто в D, то $z_0 \in V$.

Так как V открыто, то существует круг $U_r(z_0) \subset V$. Но последовательность $\{\gamma(b_n)\}$ точек из $D \setminus V$ сходится к z_0, значит, все ее члены, кроме, быть может, конечного числа, лежат в круге $U_r(z_0)$, что невозможно. $\square$

28. **Теорема единственности голоморфной функции в области. Изолированность нулей.**

Теорема 12 (Теорема единственности). *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и $E \subset D$ — ее подмножество, имеющее предельную точку $a \in D$*[2]. *Тогда если $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(D)$ и $f_1(z) = f_2(z)$ при всех $z \in E$, то $f_1(z) = f_2(z)$ при всех $z \in D$.*

Доказательство теоремы единственности. Пусть $g(z) = f_1(z) - f_2(z)$. Тогда функция g голоморфна в D и обращается в нуль в точках множества E. В силу следствия 10 существует круг $U_r(a)$, в котором функция g тождественно равна нулю.

Рассмотрим множество V точек $z \in D$ таких, что g тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки z. Так как $a \in D$, то $V \neq \emptyset$. По построению множество V открыто.

Пусть $\{z_n\}$ — последовательность точек из V, сходящаяся к точке $z_0 \in D$. Так как g непрерывна и $g(z_n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $g(z_0) = 0$. Возможны два случая: либо $z_0 = z_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, либо $z_n \neq z_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. В первом случае $z_0 = z_n \in V$. Во втором случае в каждой проколотой окрестности точки z_0 есть точки последовательности $\{z_n\}$, значит z_0 — неизолированный нуль функции g, и, согласно следствию 10, g тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки z_0. Поэтому $z_0 \in V$. Таким образом, V замкнуто в D.

По лемме об открыто-замкнутом множестве получаем, что $V = D$. Следовательно, $f_1(z) = f_2(z)$ для всех $z \in D$. □

Следующий пример показывает, что условие $a \in D$ для предельной точки a множества E существенно.

Пример. Пусть $D = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $f_1(z) = \sin(\frac{\pi}{z})$, $f_2(z) \equiv 0$, $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Тогда множество E имеет предельную точку $a = 0$, однако $f_1 \not\equiv f_2$.

Теорема единственности позволяет уточнить следствие 10 об изолированности нулей голоморфной функции.

Следствие 11. *Пусть непостоянная функция f голоморфна в области D и равна нулю в точке $a \in D$. Тогда существует такой круг $U_r(a) \subset D$, что $f(z) \neq 0$ при $z \in U_r^0(a)$. Иными словами, все нули непостоянной голоморфной функции изолированы.*

29. **Ряд Лорана, кольцо сходимости, формулы для коэффициентов ряда Лорана.**

6.1 Ряды Лорана и их свойства

Далее для чисел $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, $a \in \mathbb{C}$ через $K_{r_1,r_2}(a)$ будем обозначать кольцо $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-a| < r_2\}$.

Определение 29. Пусть a и a_n, $n \in \mathbb{Z}$ — комплексные числа. Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{6.1}$$

называется *рядом Лорана*. Часть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{6.2}$$

называется *правильной частью* ряда (6.1), а оставшаяся часть

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n := \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n} \tag{6.3}$$

называется *главной частью* ряда (6.1). Ряд (6.1) называется сходящимся, если одновременно сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n},$$

представляющие соответственно его правильную и главную части.

Предложение 28 (Сходимость ряда Лорана). *Пусть* $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, $r = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$. *Тогда:*

1. Если $R < r$, *то ряд* (6.1) *расходится в каждой точке* $z \in \mathbb{C}$.

2. Если $r < R$, *то* (6.1) *сходится абсолютно в кольце* $K_{r,R}(a)$, *расходится если* $|z-a| < r$ *или* $|z-a| > R$. *При этом каждый из рядов* (6.2), (6.3) *сходится равномерно внутри кольца* $K_{r,R}(a)$.

Доказательство. По теореме Коши-Адамара, число R является радиусом сходимости ряда (6.2). Следовательно, этот ряд сходится абсолютно в круге $U_R(a)$ и расходится при $|z-a| > R$. В силу предложения 24, ряд (6.2) сходится равномерно внутри круга $U_R(a)$.

Рассмотрим теперь ряд (6.3) по отрицательным степеням. Замена $\zeta = (z-a)^{-1}$ превращает этот ряд в степенной:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n. \tag{6.4}$$

Вновь применяя теорему Коши-Адамара, получаем, что ряд (6.4) сходится абсолютно при $|\zeta| < r^{-1}$ и расходится при $|\zeta| > r^{-1}$. В силу предложения 24, ряд (6.4) сходится равномерно внутри круга $U_{\frac{1}{r}}(a)$. Делая обратную замену $z - a = \frac{1}{\zeta}$, получаем, что ряд (6.3) сходится абсолютно при $|z-a| > r$, расходится при $|z-a| < r$ и сходится равномерно внутри множества $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$. □

Определение 30. Пусть $r < R$ — те же, что и в предыдущем предложении. Будем называть множество $K_{r,R}(a)$ *кольцом сходимости* ряда (6.1).

Предложение 29 (Формулы для коэффициентов ряда Лорана). *Пусть* $r < R$ *— те же, что и выше. Тогда функция* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$

голоморфна в кольце $K_{r,R}(a)$ *и для любого* $\rho \in (r, R)$ *коэффициенты ряда* (6.1) *удовлетворяют соотношениям*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{6.5}$$

Доказательство. Из предыдущего предложения следует, что ряды (6.2), (6.3) сходятся равномерно внутри кольца $K_{r,R}(a)$. Поэтому, согласно первой теореме Вейерштрасса, их суммы

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$$

голоморфны в $K_{r,R}(a)$, а значит и функция $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ голоморфна в этом кольце.

Пусть $\rho \in (r, R)$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как $\partial U_\rho(a) \Subset K_{r,R}$, то ряды (6.2), (6.3) сходятся равномерно на этой окружности к суммам f_1 и f_2 соответственно. Поскольку в точках $\xi \in \partial U_\rho(a)$ функция $(\xi - a)^{-n-1}$ ограничена[1], то и ряды $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-a)^{j-n-1}$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}(z-a)^{-j-n-1}$ сходятся равномерно на окружности $\partial U_\rho(a)$ к функциям $\frac{f_1(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$ и $\frac{f_2(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$ соответственно. Почленным интегрированием получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f_1(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f_2(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\partial U_\rho(a)} a_j(z-a)^{j-n-1} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial U_\rho(a)} a_{-j}(z-a)^{-j-n-1} d\xi = a_n.$$

(Мы учли, что $\int_{\partial U_\rho(a)} \frac{d\xi}{(\xi-a)^k} = 0$ при $k \neq -1$, $\int_{\partial U_\rho(a)} \frac{d\xi}{(\xi-a)} = 2\pi i$.) □

Следствие 12 (Единственность коэффициентов ряда Лорана). *Пусть ряд* (6.1) *сходится в кольце* $K_{r_1,r_2}(a)$ *к функции* $f(z)$. *Тогда для любого* $\rho \in (r_1, r_2)$ *коэффициенты ряда* (6.1) *удовлетворяют равенствам* (6.5).

Доказательство. Из предложения 28 следует, что $K_{r_1,r_2}(a)$ содержится в кольце $K_{r,R}$ сходимости ряда (6.1). Пусть $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$,

[1] $|\xi - a|^{-n-1} = \rho^{-n-1}$, при $\xi \in \partial U_\rho(a)$

30. **Теорема Лорана о разложении в ряд голоморфной в кольце функции. Единственность разложения. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.**

Теорема 13 (Теорема Лорана). *Пусть* $f \in \mathcal{O}(K_{r_1,r_2}(a))$. *Тогда:*

1. Числа

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6.7}$$

не зависят от $\rho \in (r_1, r_2)$.

2. Для любого $z \in K_{r_1,r_2}(a)$ *функция* $f(z)$ *представима сходящимся рядом:* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$, *называемым рядом Лорана функции* f *в кольце* $K_{r_1,r_2}(a)$. *Коэффициенты* a_n, $n \in \mathbb{Z}$ *называются коэффициентами Лорана функции* f *в кольце* $K_{r_1,r_2}(a)$.

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольные $\rho_1 < \rho_2$ из интервала (r_1, r_2) и $n \in \mathbb{Z}$. Так как функция $\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ голоморфна в кольце $K_{r_1,r_2}(a)$, содержащем $\overline{K_{\rho_1,\rho_2}(a)}$, то по интегральной теореме Коши

$$\int_{\partial K_{\rho_1,\rho_2}(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = 0.$$

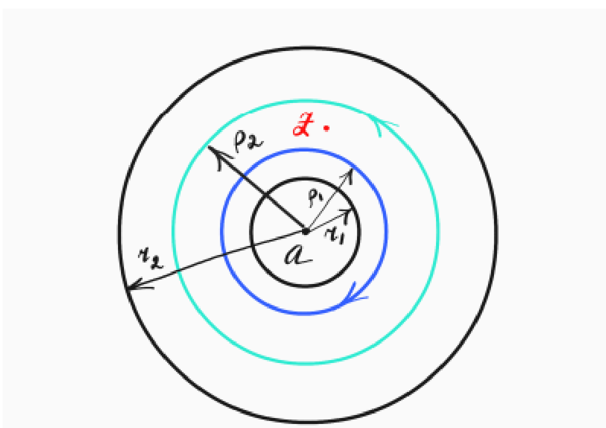


Рис. 6.1:

Поскольку

$$\int_{\partial K_{\rho_1,\rho_2}(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = \int_{\partial U_{\rho_2}(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi - \int_{\partial U_{\rho_1}(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi,$$

получаем $\int_{\partial U_{\rho_2}(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \int_{\partial U_{\rho_1}(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$. (Второй из интегралов берется со знаком “минус”, так как внутренняя окружность кольца ориентирована по часовой стрелке, см. рис. 6.1).

2. Зафиксируем $z \in K_{r_1,r_2}(a)$ и выберем ρ_1, ρ_2, удовлетворяющие соотношению

$$r_1 < \rho_1 < |z - a| < \rho_2 < r_2.$$

Так как f непрерывна на компакте $\overline{K_{\rho_1,\rho_2}(a)}$, то $M = \max_{\xi \in \overline{K_{\rho_1,\rho_2}(a)}} |f(\xi)| < +\infty$.

Из интегральной формулы Коши следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{\rho_1,\rho_2}(a)} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = I_2(z) - I_1(z), \quad \text{где}$$
$$I_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_{\rho_2}(a)} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}, \quad I_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_{\rho_1}(a)} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}. \tag{6.8}$$

(Интеграл $I_1(z)$ берется со знаком "минус", так как внутренняя окружность ориентирована по часовой стрелке (см. рис.)). Разложим каждый из интегралов $I_2(z)$, $I_1(z)$ в ряд по степеням $z - a$.

Рассмотрим сначала $I_2(z)$. Его мы будем раскладывать в ряд так же, как и в теореме Тейлора. Пусть $\xi \in \partial U_{\rho_2}(a)$. Тогда $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| = \frac{|z-a|}{\rho_2} < 1$. Поэтому подынтегральное выражение в $I_2(z)$ раскладывается в геометрическую прогрессию:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{f(\xi)}{(\xi - a)}\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}. \tag{6.9}$$

Поскольку при $\xi \in \partial U_{\rho_2}(a)$ справедливы оценки

$$\left|\frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}\right| \le \frac{M|z-a|^n}{{\rho_2}^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M|z-a|^n}{{\rho_2}^{n+1}}$ сходится и не зависит от ξ, то ряд (6.9) сходится равномерно относительно параметра $\xi \in \partial U_{\rho_2}(a)$ по признаку Вейерштрасса. Интегрируя почленно ряд (6.9) и учитывая (6.7) при $\rho = \rho_2$, получаем

$$I_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n. \tag{6.10}$$

Рассмотрим теперь $I_1(z)$. При $\xi \in \partial U_{\rho_1}(a)$ имеем $\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right| = \frac{\rho_1}{|z-a|} < 1$. Поэтому подынтегральное выражение в $I_1(z)$ раскладывается в геометрическую прогрессию:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - a) - (z - a)} = -\frac{f(\xi)}{(z - a)}\frac{1}{1 - \frac{\xi-a}{z-a}} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(\xi-a)^j}{(z - a)^{j+1}}. \tag{6.11}$$

Так как при $\xi \in \partial U_{\rho_1}(a)$ справедливы оценки

$$\left|\frac{f(\xi)(\xi-a)^j}{(z-a)^{j+1}}\right| \le \frac{M\rho_1^j}{|z-a|^{j+1}}, \quad j=0,1,\dots$$

и ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{M\rho_1^j}{|z-a|^{j+1}}$ сходится и не зависит от ξ, то ряд (6.11) сходится равномерно относительно параметра $\xi \in \partial U_{\rho_1}(a)$ по признаку Вейерштрасса. Почленное интегрирование ряда (6.11) с учетом (6.7) при $\rho = \rho_1$ дает

$$I_1(z) = -\sum_{j=0}^{\infty} a_{-j-1}(z-a)^{-j-1} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n. \tag{6.12}$$

Таким образом, при всех $z \in K_{r_1,r_2}$ функция $f(z)$ раскладывается в сходящийся ряд Лорана:

$$f(z) = I_2(z) - I_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

□

Замечание 8. Из теоремы Лорана и следствия 12 получаем, что функция f, голоморфная в кольце K_{r_1,r_2} раскладывается в этом кольце в ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ единственным образом. При этом коэффициенты a_n, $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют соотношениям (6.7) для любого $\rho \in (r_1, r_2)$.

Доказательство следующего утверждения аналогично приведенному для коэффициентов степенного ряда.

Предложение 30 (Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана)**.** *Пусть* $K_{r,R}(a)$ *— кольцо сходимости ряда* (6.1). *Для любого* $\rho \in (r,R)$ *положим* $M(\rho) = \max_{\xi\in\partial U_\rho(a)} |f(\xi)|$. *Тогда коэффициенты ряда* (6.1) *удовлетворяют неравенствам Коши:*

$$|a_n| \le \frac{M(\rho)}{\rho^n}. \tag{6.6}$$

31. **Изолированные особые точки голоморфных функций. Критерии устранимой особой точки.**

Определение 31. Точка $a \in \mathbb{C}$ называется *изолированной особой точкой (голоморфной) функции* $f(z)$, если $f \in \mathcal{O}(U^0_\delta(a))$ для некоторого $\delta > 0$. Изолированная особая точка функции f называется:

(1) *устранимой*, если существует $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$;

(2) *полюсом*, если $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$;

(3) *существенно особой точкой*, если не существует предела (ни конечного, ни бесконечного) функции $f(z)$ при $z \to a$.

Примеры. Точка $a = 0$ является:

1) устранимой для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$,

2) полюсом для функции $g(z) = \frac{1}{z}$,

3) существенно особой для функции $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Отметим, что проколотая окрестность $U^0_\delta(a)$ является кольцом $K_{0,\delta}(a)$. Из теоремы Лорана следует, что в $U^0_\delta(a)$ функция f представима сходящимся рядом Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Посмотрим, какой вид имеет этот ряд для каждого типа изолированной особой точки.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности $U^0_\delta(a)$ точки a.

Предложение 31. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) a — устранимая особая точка;

(2) функция $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $U^0_r(a)$;

(3) коэффициенты a_n, $n < 0$ ряда Лорана функции f в кольце $U^0_\delta(a)$ равны нулю;

(4) можно доопределить функцию $f(z)$ в точке a до голоморфной функции в круге $U_\delta(a)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) — очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (3). По условию существует такое $M > 0$, что $|f(z)| \le M$ при $z \in U^0_r(a)$. Из неравенств Коши (6.6) при $\rho \in (0, r)$ и $k \in \mathbb{N}$ получаем $|a_{-k}| \le M\rho^k$. Устремляя $\rho \to 0+0$, получаем $a_{-k} = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4). По условию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ при $z \in U^0_\delta(a)$. В силу теоремы Коши-Адамара, радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ не меньше δ. Полагая $f(a) = a_0$, получаем, что $f \in \mathcal{O}(U_\delta(a))$ в силу голоморфности суммы степенного ряда в круге сходимости.

(4) $\Rightarrow$ (1) очевидно. $\square$

32. **Изолированные особые точки голоморфных функций. Критерии полюса. Порядок полюса.**

Определение 31. Точка $a \in \mathbb{C}$ называется *изолированной особой точкой (голоморфной) функции* $f(z)$, если $f \in \mathcal{O}(U_\delta^0(a))$ для некоторого $\delta > 0$. Изолированная особая точка функции f называется:

(1) *устранимой*, если существует $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$;

(2) *полюсом*, если $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$;

(3) *существенно особой точкой*, если не существует предела (ни конечного, ни бесконечного) функции $f(z)$ при $z \to a$.

Примеры. Точка $a = 0$ является:

1) устранимой для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$,

2) полюсом для функции $g(z) = \frac{1}{z}$,

3) существенно особой для функции $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Отметим, что проколотая окрестность $U_\delta^0(a)$ является кольцом $K_{0,\delta}(a)$. Из теоремы Лорана следует, что в $U_\delta^0(a)$ функция f представима сходящимся рядом Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Посмотрим, какой вид имеет этот ряд для каждого типа изолированной особой точки.

Предложение 32. *Пусть $f \in \mathcal{O}(U_\delta^0(a))$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) Точка a является полюсом функции f.

(2) Существуют такие $n \in \mathbb{N}$ и функция g, голоморфная в круге $U_\delta(a)$, что $g(a) \neq 0$ и

$$f(z) = (z-a)^{-n} g(z) \quad \text{при} \quad z \in U_\delta^0(a). \tag{6.13}$$

(3) Главная часть ряда Лорана функции f с центром в точке a содержит конечное (но ненулевое число) отличных от нуля членов. При этом разложение функции f в ряд Лорана на множестве $U_\delta^0(a)$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-a)^k, \tag{6.14}$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$, причем $a_{-n} \neq 0$.

Число n в представлениях (6.13), (6.14) *одно и то же.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$. Тогда существует такое $\delta_1 \le \delta$, что $f(z) \neq 0$ при $z \in U^0_{\delta_1}(a)$. Рассмотрим

$$\phi(z) = \frac{1}{f(z)}, \quad z \in U^0_{\delta_1}(a).$$

Тогда $\phi \in \mathcal{O}(U^0_{\delta_1}(a))$ и $\lim_{z\to a} \phi(z) = 0$. Положим $\phi(a) = 0$. Из предыдущего предложения следует, что $\phi \in \mathcal{O}(U_{\delta_1}(a))$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ — порядок нуля функции ϕ в точке a. В силу предложения 27, справедливо представление $\phi(z) = (z-a)^n h(z)$, где функция $h \in \mathcal{O}(U_{\delta_1}(a))$, $h(a) \neq 0$. Так как функция ϕ не обращается в нуль в точках из проколотой окрестности $U^0_{\delta_1}(a)$, то функция h не имеет нулей в целом круге $U_{\delta_1}(a)$. Пусть $g(z) = \frac{1}{h(z)}$. Тогда $g(z)$ также как и $h(z)$ голоморфна в целой окрестности $U_{\delta_1}(a)$ и не имеет в ней нулей. Тем самым в проколотой окрестности $U^0_{\delta_1}(a)$ имеем $\phi(z) = \frac{(z-a)^n}{g(z)}$, $f(z) = (z-a)^{-n} g(z)$. Так как $g(z) = f(z)(z-a)^n$ при $z \in U^0_{\delta_1}(a)$, то доопределив ее этим же равенством в точках $z \in U^0_\delta(a)$, получим функцию, удовлетворяющую (6.13).

(2) $\Rightarrow$ (3). Разложим функцию g в ряд Тейлора в круге $U_\delta(a)$: $g(z) = \sum_{k=0}^\infty b_k (z-a)^k$, где $b_0 = g(a) \neq 0$. Тогда в проколотой окрестности $U^0_\delta(a)$ имеем

$$f(z) = (z-a)^{-n} \sum_{k=0}^\infty b_k (z-a)^k = \frac{b_0}{(z-a)^n} + \frac{b_1}{(z-a)^{n-1}} + \dots.$$

Полагая $a_j = b_{j+n}$ при $j \ge -n$, $a_j = 0$ при $j < -n$, убеждаемся в справедливости (6.14).

(3) $\Rightarrow$ (1). Из (6.14) при $z \in U^0_\delta(a)$ имеем

$$f(z) = (z-a)^{-n} (a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \dots).$$

Пусть $g(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \dots$, $z \in U_\delta(a)$. Так как $g(a) = a_{-n} \neq 0$, то

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{g(z)}{(z-a)^n} = \infty.$$

$\square$

Определение 32. Пусть точка a является полюсом функции f. Число $n \in \mathbb{N}$ из представления (6.14) называется *порядком полюса* функции f в точке a. Полюса первого порядка называются *простыми*.

Замечание 9. Из представления (6.13) следует, что порядок полюса функции f в точке a равен порядку нуля в точке a функции $h(z) = \frac{1}{f(z)}$, доопределенной нулем в этой точке.

Замечание 10. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности $U_\delta^0(a)$ точки a и $f \not\equiv 0$. Из приведенных выше рассуждений следует, что изолированная особая точка a функции f является устранимой или полюсом для $f \iff$ существует такие $g \in \mathcal{O}(U_\delta(a))$ и $m \in \mathbb{Z}$, что $g(a) \neq 0$ и

$$f(z) = (z-a)^m g(z), \quad z \in U_\delta(a).$$

33. **Изолированные особые точки голоморфных функций. Критерий существенно особой точки. Теорема Сохоцкого.**

Определение 31. Точка $a \in \mathbb{C}$ называется *изолированной особой точкой (голоморфной) функции* $f(z)$, если $f \in \mathcal{O}(U_\delta^0(a))$ для некоторого $\delta > 0$. Изолированная особая точка функции f называется:

(1) *устранимой*, если существует $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$;

(2) *полюсом*, если $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$;

(3) *существенно особой точкой*, если не существует предела (ни конечного, ни бесконечного) функции $f(z)$ при $z \to a$.

Примеры. Точка $a = 0$ является:

1) устранимой для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$,

2) полюсом для функции $g(z) = \frac{1}{z}$,

3) существенно особой для функции $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Отметим, что проколотая окрестность $U_\delta^0(a)$ является кольцом $K_{0,\delta}(a)$. Из теоремы Лорана следует, что в $U_\delta^0(a)$ функция f представима сходящимся рядом Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Посмотрим, какой вид имеет этот ряд для каждого типа изолированной особой точки.

Из предложений 31 и 32 вытекает

Следствие 13. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности $U_\delta^0(a)$ точки a. Тогда a является существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть ее ряда Лорана в $U_\delta^0(a)$ содержит бесконечно много ненулевых членов.*

Теорема 14 (Теорема Сохоцкого)**.** *Пусть точка a вляется существенно особой для функции f. Тогда для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ существует такая последовательность точек z_n, сходящаяся к a, что $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

Доказательство. Пусть $A = \infty$. Так как точка a не является устранимой для $f(z)$, то в силу предложения 31, функция f не является ограниченной ни в какой проколотой окрестности точки a. Поэтому существует последовательность $z_n \to a$ для которой $f(z_n) \to \infty$.

Рассмотрим случай $A \in \mathbb{C}$. Если в любой проколотой окрестности $U^0_{\frac{1}{n}}(a)$ существует такая точка z_n, что $f(z_n) = A$, то последовательность $\{f(z_n)\}$ очевидно сходится к A. Иначе существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $f(z) \neq A$ для всех $z \in U^0_{\frac{1}{N}}(a)$. Возьмем такое $\delta \leq \frac{1}{N}$, что $f \in \mathcal{O}(U^0_\delta(a))$ и рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}.$$

По построению $g \in \mathcal{O}(U^0_\delta(a))$ и $f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$. Если бы точка a была устранимой, или полюсом для функции $g(z)$, то она была бы устранимой, или полюсом для $f(z)$ ($\lim_{z\to a} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to a} g(z) = 0$, иначе

точка a была бы устранимой для $f(z)$). Следовательно, точка a является существенно особой для $g(z)$ и, рассуждая как выше, получаем, что существует такая последовательность $z_n \to a$, что $g(z_n) \to \infty$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A + \left(\lim_{n\to\infty} g(z_n)\right)^{-1} = A,$$

что и требовалось доказать. $\square$

34. **Вычет в изолированной особой точке. Теорема Коши о вычетах.**

Определение 35. Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности $U^0_\delta(a)$ точки a. *Вычетом функции f в точке a* называется число

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r} f(\xi)d\xi, \quad r\in(0,\delta) \tag{7.1}$$

(так как $f\in\mathcal{O}(\overline{K_{r_1,r_2}(a)})$ для любых $0<r_1<r_2<\delta$, то в силу интегральной теоремы Коши $\int_{|\xi-a|=r_1} f(\xi)d\xi = \int_{|\xi-a|=r_2} f(\xi)d\xi$, поэтому интеграл (7.1) не зависит от r).

Теорема 16 (Теорема Коши о вычетах)**.** *Пусть D — область с простой границей и существует такая область $G\Supset D$ и такой конечный набор точек $a_1, \ldots, a_n\in D$, что функция $f\in\mathcal{O}(G\setminus\cup_{j=1}^n a_j)$. Тогда*

$$\int_{\partial D} f(\xi)d\xi = 2\pi i\sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{a_j} f. \tag{7.2}$$

Доказательство. Возьмем такое $\delta>0$, что круги $U_\delta(a_j)\Subset D$, $1\le j\le n$. Пусть

$$D_\delta = D\setminus\cup_{j=1}^n\overline{U_\delta(a_j)}.$$

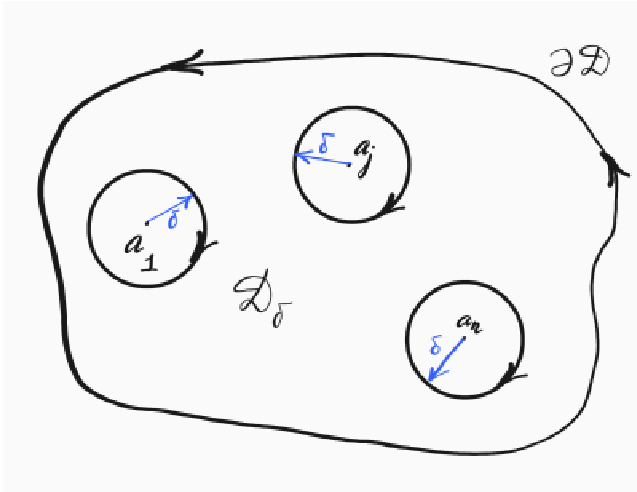


Рис. 7.1:

Так как $\partial D_\delta = \partial D + \cup_{j=1}^n (\partial U_\delta(a_j))^-$ (см. рис. 7.1) и $f \in \mathcal{O}(\overline{D_\delta})$, то из интегральной теоремы Коши имеем

$$0 = \int_{\partial D_\delta} f(\xi)d\xi = \int_{\partial D} f(\xi)d\xi - \sum_{j=1}^n \int_{\partial U_\delta(a_j)} f(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\partial D} f(\xi)d\xi - 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{a_j} f.$$

□

35. **Формулы для вычисления вычета в полюсе.**

Предложение 35 (Формулы для вычисления вычетов в полюсе)**.** *Пусть точка a является полюсом порядка n функции $f \in \mathcal{O}(U_\delta^0(a))$. Тогда:*

(1) если a — простой полюс, то

$$res_a f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z); \tag{7.3}$$

(2) если $n > 1$, то

$$res_a f = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\left((z-a)^n f(z)\right)^{(n-1)}. \tag{7.4}$$

Доказательство. (1) По условию $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$. Следовательно, $a_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

(2) По условию $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z-a)^k$. Следовательно, функция $h(z) = f(z)(z-a)^n$ продолжается до голоморфной в круге $U_\delta(a)$ и ее разложение в ряд Тейлора в этом круге имеет вид

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k = a_{-n} + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}(z-a)^{n+k}.$$

Поэтому $a_{-1} = b_{n-1} = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$. □

Следующее утверждение очень часто используется для нахождения вычета в простом полюсе.

36. **Вычет в простом полюсе. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.**

Предложение 36. *Пусть функции $\phi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфны в круге $U_\delta(a)$, причем $\phi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$. Тогда функция $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$ имеет простой полюс в точке a и*

$$\operatorname{res}_a f = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}.$$

Доказательство. Так как $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, то $\psi(z) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности $U_r^0(a)$, $r \in (0, \delta]$. Поскольку

$$\lim_{z \to a}(z-a)\frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to a} \phi(z) \left(\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z-a} \right)^{-1} = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)} \neq 0,$$

точка a является устранимой для функции $g(z) = (z-a)\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$. Доопределив $g(a) = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}$, получим, что $g \in \mathcal{O}(U_r(a))$, $g(a) \neq 0$. Следовательно, $f(z) = (z-a)^{-1}g(z)$ при $z \in U_r^0(a)$. Тем самым точка a является простым полюсом для f и $\operatorname{res}_a f = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}$. □

Пусть $f \in \mathcal{O}(U_R(\infty))$.

Определение 36. *Вычетом функции f в бесконечности* называется число

$$\operatorname{res}_\infty f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho^-} f(\xi) d\xi, \quad \rho > R \tag{7.5}$$

где интеграл берется по окружности $\gamma_\rho = \{|\xi - a| = \rho\}$, проходимой *по часовой стрелке* (в силу интегральной теоремы Коши, интеграл в (7.5) не зависит от $\rho > R$).

Если ряд Лорана функции f в окрестности бесконечности имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad |z| > R,$$

то, из формул (6.7) при $n = -1$ получаем

$$\operatorname{res}_\infty f = -a_{-1}.$$

Замечание 11. Отметим, что если точка $a = \infty$ является устранимой для f, то $\operatorname{res}_\infty f$ не обязательно равен нулю, например $\operatorname{res}_\infty \frac{1}{z} = -1$.

Теорема 17 (Теорема о полной сумме вычетов)**.** *Пусть функция f голоморфна во всей плоскости $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа точек $\{a_j\}$, $1 \le j \le n$. Тогда*

$$\operatorname{res}_\infty f + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{a_j} f = 0.$$

Доказательство. Пусть $\rho > R = \max_{1\le j\le n} |a_j|$. Применяя к кругу $U_\rho(0)$ теорему Коши о вычетах, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho(0)} f(\xi)d\xi = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{a_j} f.$$

С другой стороны, $f \in \mathcal{O}(U_R(\infty))$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho(0)} f(\xi)d\xi = -\operatorname{res}_\infty f(\xi).$$

$\square$

37. **Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана. Интегралы Френеля.**

1. Пусть $R(x,y)$ — рациональная функция от x, y, отличная от нуля на окружности $x^2+y^2=1$. Тогда функция $R(\cos t, \sin t)$ непрерывна, следовательно, интегрируема на отрезке $[0,2\pi]$. Покажем, как вычислить интеграл

$$I=\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt, \tag{7.6}$$

применяя теорию вычетов. Сделаем в (7.6) замену $\xi=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Имеем:

$$\cos t=\frac{\xi+\frac{1}{\xi}}{2}, \quad \sin t=\frac{\xi-\frac{1}{\xi}}{2i}, \quad dt=\frac{d\xi}{i\xi}.$$

Таким образом, вычисление интеграла (7.6) сводится к вычислению интеграла по единичной окружности от рациональной функции.

$$I_1=\int_{|\xi|=1} R\left(\frac{\xi+\frac{1}{\xi}}{2}, \frac{\xi-\frac{1}{\xi}}{2i}\right)\frac{d\xi}{i\xi}.$$

2. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ — такие многочлены, что $Q(x)$ не имеет нулей при действительных x и $\deg Q \geq \deg P+2$. Рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx. \tag{7.7}$$

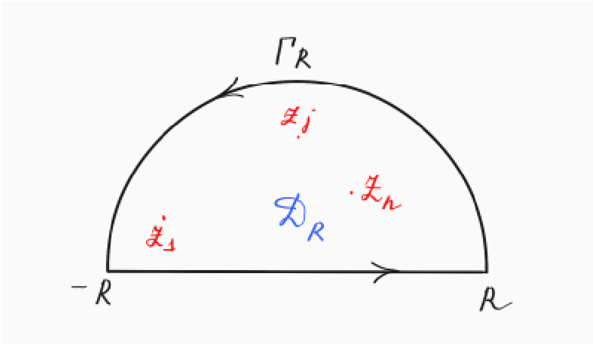


Рис. 7.2:

Так как $\deg Q \geq \deg P + 2$, то существует такое $M > 0$, что для достаточно больших $|z|$ справедлива оценка

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

Поэтому, в частности, интеграл (7.7) сходится. Пусть $z_1, \ldots, z_l$ — все нули функции $Q(z)$, лежащие в верхней полуплоскости и $R > r_0 = \max_{1 \leq j \leq l} |z_j|$. Рассмотрим область $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$. Ее граница ∂D_R состоит из двух частей: отрезка $[-R, R]$ действительной прямой и верхней полуокружности $\Gamma_R = \{\xi = Re^{it}, t \in [0, \pi]\}$, проходимой против часовой стрелки (см. рис. 7.2). По теореме Коши о вычетах

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \\ = 2\pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{res}_{z_j} \frac{P(z)}{Q(z)}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Устремим $R \to +\infty$. Тогда $\int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$,

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz\right| \leq \frac{M}{R^2}\pi R = \frac{\pi M}{R} \to 0.$$

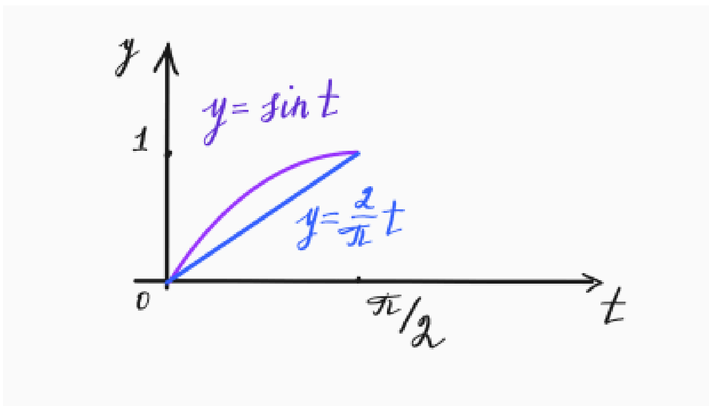


Рис. 7.3:

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{res}_{z_j} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

При вычислении некоторых видов интегралов бывает очень полезна

Лемма 2 (Лемма Жордана)**.** *Пусть функция f непрерывна на множестве*

$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0, \operatorname{Im} z \geq 0\},$$

причем $\lim_{z\to\infty, z\in E} f(z) = 0$. Рассмотрим при $R > R_0$ верхнюю полуокружность $\Gamma_R = \{\xi(t) = Re^{it}, t \in [0,\pi]\}$. Тогда для любого $a > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{ia\xi} f(\xi) d\xi = 0.$$

Доказательство. Для любого $R > R_0$ положим $M_R = \max_{\xi\in\Gamma_R} |f(\xi)|$. По условию $\lim_{R\to+\infty} M_R = 0$. Так как

$$\int_{\Gamma_R} e^{ia\xi} f(\xi) d\xi = \int_0^\pi e^{iaR\cos t - aR\sin t} f(Re^{it}) iRe^{it} dt$$

и при $t \in [0,\pi]$ справедливо неравенство

$$\left|e^{iaR\cos t - aR\sin t} f(Re^{it}) iRe^{it}\right| \leq M_R R e^{-aR\sin t},$$

то

$$I(R) := \left|\int_{\Gamma_R} e^{ia\xi} f(\xi) d\xi\right| \leq \int_0^\pi M_R R e^{-aR\sin t} dt = 2M_R R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t} dt. \tag{7.9}$$

Для оценки интеграла в правой части (7.9), воспользуемся неравенством $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (см. рис. 7.3). Следовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR}{\pi} t} dt = \frac{\pi}{2aR}\left(1 - e^{-aR}\right),$$

$$I(R) \leq \frac{\pi M_R}{a}\left(1 - e^{-aR}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

□

—

3. **Вычисление преобразования Фурье от рациональной функции.** Пусть $a > 0$ и $P(x)$, $Q(x)$ — такие многочлены, что $Q(x)$ не имеет нулей при действительных x и $\deg Q > \deg P$. Рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}P(x)}{Q(x)}dx := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)P(x)}{Q(x)}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)P(x)}{Q(x)}dx. \quad (7.10)$$

Поскольку $\deg Q > \deg P$, существует такое $A > 0$, что функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ монотонна на промежутках $(-\infty, -A]$, $[A, +\infty)$, причем $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$. Учитывая, что функции $\cos ax$, $\sin ax$ имеют ограниченную первообразную, получаем, что оба интеграла в правой части (7.10) сходятся по признаку Дирихле, следовательно, существует и интеграл в левой части (7.10).

Пусть, как и раньше, $z_1, \ldots, z_l$ — все нули функции $Q(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, $R > R_0 = \max_{1\le j\le l} |z_j|$. $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$, $\Gamma_R = \{\xi = Re^{it}, t \in [0, \pi]\}$. По теореме Коши о вычетах

$$\int_{-R}^{R} e^{iax}\frac{P(x)}{Q(x)}dx + \int_{\Gamma_R} e^{iaz}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{res}_{z_j} e^{iaz}\frac{P(z)}{Q(z)}. \qquad (7.11)$$

Устремим $R \to +\infty$. Тогда

$$\int_{-R}^{R} e^{iax}\frac{P(x)}{Q(x)}dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Так как $\deg Q > \deg P$, то $\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = 0$. Поэтому к функции $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ применима лемма Жордана, следовательно

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{iaz}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = 0.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{res}_{z_j} e^{iaz}\frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Интегралы Френеля $S(x)$ и $C(x)$ — это специальные функции, названные в честь Огюстена Жана Френеля и используемые в оптике. Они возникают при расчёте дифракции Френеля и определяются как

$$S(x) = \int\limits_0^x \sin(t^2)\,dt, \quad C(x) = \int\limits_0^x \cos(t^2)\,dt.$$

- Интегралы Френеля не выражаются через элементарные функции, кроме частных случаев. Предел этих функций при $x \to \infty$ равен
$$\int\limits_0^\infty \cos t^2\,dt = \int\limits_0^\infty \sin t^2\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Вычисление [править | править код]

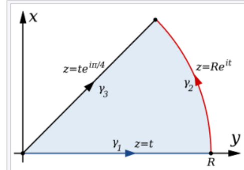
Пределы функций C и S при $x \to \infty$ могут быть найдены с помощью контурного интегрирования. Для этого берётся контурный интеграл функции

$$e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

по границе сектора на комплексной плоскости, образованного осью абсцисс, лучом $y = x$, $x \geqslant 0$ и окружностью радиуса R с центром в начале координат. При $R \to \infty$ интеграл по дуге стремится к 0, интеграл по вещественной оси стремится к значению интеграла Пуассона

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

и, после некоторых преобразований, интеграл вдоль оставшегося луча может быть выражен через предельное значение интеграла Френеля.



Контур, используемый для вычисления предельного значения интегралов Френеля.

Интегралы Френеля

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx \qquad\qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx$$

$$\frac{I}{2} = \int_o^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}du$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} du\, e^{-tu^2}\sin t$$

Вместо интеграла *I* рассмотреть семейство интегралов *I(k),* чтобы не было проблем с сходимостью:

$$I(k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

При интегралах с $k \neq 0$ сходятся.

В силу признака Абеля, этот интеграл сходится по k от 0 до какого-то k_0

$$I(k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t}\sin t\,du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t}\sin t\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t}\sin t\,dt = Im\int_0^{+\infty} e^{[-(k+u^2)+i]t}dt = Im\frac{1}{-(k+u^2)+i}e^{[-(k+u^2)+i]t}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= Im\frac{1}{(k+u^2)-i} = Im\frac{k+u^2+i}{(k+u^2)^2+1} = \frac{1}{(k+u^2)^2+1}$$

Следовательно:

$$I(k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{du}{(k+u^2)^2+1} \quad \text{тогда}$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^4+1}$$

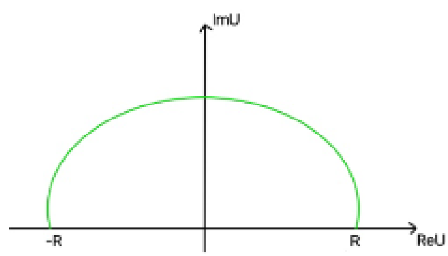


Рис. 12

Интеграл по дуге окружности (рис.12) будет стремиться к нулю, так как

$$\frac{R}{R^4} \sim \frac{1}{R^3} \to 0,$$

39. Логарифмический вычет. Теорема о логарифмическом вычете.

Определение 38. Пусть функция $f(z)$ голоморфна и не имеет нулей в некоторой проколотой окрестности $U^0_\delta(a)$ точки a. Тогда в этой окрестности определено выражение $\frac{f'(z)}{f(z)}$, которое называется *логарифмической производной функции* $f(z)$. Число $\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)}$ называется *логарифмическим вычетом функции* $f(z)$ *в точке* a.

Определение 39. Функция $f(z)$ называется *мероморфной* в области G (обозначение $f \in \mathcal{M}(G)$), если все ее особые точки в этой области являются полюсами.

Определение 40. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в области G и имеет в этой области не более чем конечное число нулей и полюсов. Тогда число $N(f, G)$, равное сумме порядков всех нулей функции f в области G, называется *числом нулей функции* f *в области* G *с учетом кратности*, а число $P(f, G)$, равное сумме порядков всех полюсов функции f в области G, называется *числом полюсов функции* f *в области* G *с учетом кратности.*

Теорема 18 (Теорема о логарифмическом вычете)**.** *Пусть D — область с простой границей, функция $f(z)$ мероморфна в некоторой области $G \Supset D$ и имеет в области G не более чем конечное число нулей и полюсов, причем все эти нули и полюсы содержатся в области D. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = N(f, D) - P(f, D). \tag{8.1}$$

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — все нули функции f в области G порядков $n_1, \ldots, n_k$ соответственно, а $b_1, \ldots, b_l$ — все полюса функции f в области G порядков $m_1, \ldots, m_l$ соответственно. Тогда функция $\frac{f'(z)}{f(z)}$ голоморфна в $G \setminus \{(\cup_{j=1}^k a_j) \cup (\cup_{s=1}^l b_s)\}$. По теореме Коши о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{a_j} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{s=1}^{l} \operatorname{res}_{b_s} \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Осталось заметить, что в силу леммы о логарифмическом вычете

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{a_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = N(f, D), \quad \sum_{s=1}^{l} \operatorname{res}_{b_s} \frac{f'(z)}{f(z)} = -P(f, D).$$

□

Лемма 4 (Лемма о логарифмическом вычете)**.** *Если точка a является нулем порядка n функции $f(z)$, то* $\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = n$. *Если же точка a является полюсом порядка n функции $f(z)$, то* $\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = -n$.

Доказательство. По условию, существуют такая окрестность $U_\delta(a)$ и функция $g(z)$, голоморфная в этой окрестности и не имеющая в ней нулей, что

$$f(z) = (z-a)^k g(z), \quad \text{при} \quad z \in U_\delta^0(a),$$

где либо $k = n$, если a является нулем функции f, либо $k = -n$, если a является полюсом функции f. Следовательно

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-a)^{k-1}g(z) + (z-a)^k g'(z)}{(z-a)^k g(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Функция $\frac{g'(z)}{g(z)}$ голоморфна в окрестности $U_\delta(a)$, поэтому главная часть ряда Лорана функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в проколотой окрестности $U_\delta^0(a)$ равна $\frac{k}{z-a}$ и $\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = k$. □

40. **Изменение аргумента точки и функции вдоль кривой, их свойства.**

Предложение 38. *Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — непрерывная кривая. Тогда:*

1. Существует такая действительная функция $\Theta \in C[a,b]$, что

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\Theta(t)}, \quad t \in [a,b]. \tag{8.5}$$

2. Она единственна с точностью до прибавления $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

3. Если γ — непрерывно дифференцируемая кривая (т.е. функции $\operatorname{Re}\gamma(t)$ и $\operatorname{Im}\gamma(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$), то и непрерывная функция Θ, удовлетворяющая (8.5), непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. 1. Пусть Π_j — полуплоскости, заданные в (8.3), а $\arg_j$ — функции, определенные в (8.4), $1 \le j \le 4$. Если кривая γ лежит целиком в полуплоскости Π_j, то функция $\Theta(t) = \arg_j(\gamma(t))$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет (8.5).

Рассмотрим теперь случай, когда кривая γ не лежит целиком ни в одной из вышеперечисленных плоскостей. Пусть число $d > 0$ удовлетворяет заключению леммы 5. Возьмем разбиение $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$ на участки длины меньше d. Тогда при $1 \le k \le n$ каждая из кривых $\gamma_k(t) = \gamma(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$ содержится целиком в одной

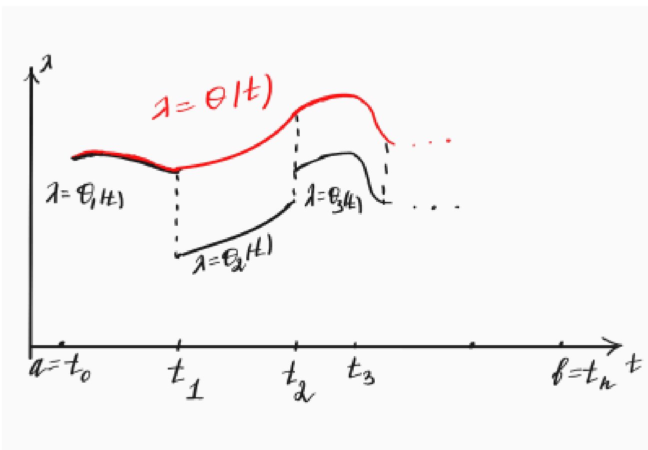


Рис. 8.1:

из Π_j, поэтому существуют функции $\theta_k \in C[t_{k-1}, t_k]$, удовлетворяющие соотношениям
$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\theta_k(t)}, \quad t \in [t_{k-1}, t_k]. \tag{8.6}$$

Пусть $1 \le k \le n-1$. Так как точка t_k принадлежит участкам $[t_{k-1}, t_k]$ и $[t_k, t_{k+1}]$, то
$$e^{i\theta_k(t_k)} = e^{i\theta_{k+1}(t_k)} = \frac{\gamma(t_k)}{|\gamma(t_k)|},$$
следовательно, $\theta_{k+1}(t_k) - \theta_k(t_k) = 2\pi m_k$ для некоторого $m_k \in \mathbb{Z}$.

Поэтому функция
$$\Theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x), x \in [t_0, t_1], \\ \theta_2(x) - 2\pi m_1, x \in (t_1, t_2], \\ \ldots \\ \theta_n(x) - 2\pi(m_1 + \cdots + m_{n-1}), x \in (t_n - 1, t_n] \end{cases}$$

непрерывна на всем отрезке $[a,b]$ и на каждом участке $[t_{k-1},t_k]$ удовлетворяет равенству $e^{i\Theta(t)}=e^{i\theta_k(t)}$ (см. рис. 8.1), следовательно, $\Theta(x)$ удовлетворяет соотношению (8.5).

2. Пусть функции Θ_1 и Θ_2 непрерывны на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют соотношению (8.5). Тогда

$$e^{i\Theta_1(t)}=e^{i\Theta_2(t)}=\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|},\quad t\in[a,b].$$

Поэтому непрерывная функция $\eta(t)=\Theta_2(t)-\Theta_1(t)$ может принимать только значения, кратные 2π. Если бы функция $\eta(t)$ была непостоянной на отрезке $[a,b]$, то нашлись бы такие точки $t_1,t_2\in[a,b]$, что $\eta(t_1)\neq\eta(t_2)$. Но тогда по теореме о промежуточном значении, функция $\eta(t)$ должна была бы принимать все значения между $\eta(t_1)$ и $\eta(t_2)$, что невозможно. Отсюда существует такое $m\in\mathbb{Z}$, что $\Theta_2(t)-\Theta_1(t)=2\pi m$ для всех $t\in[a,b]$.

3. Пусть функция $\Theta(t)$ непрерывна и удовлетворяет (8.5). Возьмем число d из леммы 5. Достаточно показать, что функция $\Theta(t)$ непрерывно дифференцируема на любом отрезке $[t_1,t_2]\subset[a,b]$, для которого $t_2-t_1\le d$. В силу леммы 5 найдется такое $j\in\{1,2,3,4\}$ что $\gamma(t)\in\Pi_j$ при $t\in[t_1,t_2]$. Поскольку функция $\arg_j(z)$ является непрерывно дифференцируемой в полуплоскости Π_j, то и суперпозиция $\widetilde{\Theta}(t)=\arg_j(\gamma(t))$ непрерывно дифференцируема на $[t_1,t_2]$. Рассуждая, как в 1., 2., последовательно получаем, что на отрезке $[t_1,t_2]$ функция $\widetilde{\Theta}(t)$ удовлетворяет соотношению (8.5) и $\widetilde{\Theta}(t)-\Theta(t)=2\pi m$ для некоторого $m\in\mathbb{Z}$. Отсюда $\Theta\in C^1[t_1,t_2]$. $\square$

Определение 41. Пусть $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ — непрерывная кривая, $\Theta(t)$ — функция из предложения 38. Величина

$$\Delta_\gamma\arg z=\Theta(b)-\Theta(a)$$

называется *изменением аргумента z вдоль кривой γ*.

Предложение 39 (Свойства $\Delta_\gamma\arg z$)**.** *Пусть γ: $[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ — непрерывная кривая. Тогда:*

a) $\Delta_{\gamma^-}\arg z=-\Delta_\gamma\arg z$;

б) если $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (то есть существует такое $c \in (a,b)$, что $\gamma_1(t) = \gamma(t)$ при $t \in [a,c]$, $\gamma_2(t) = \gamma(t)$ при $t \in [c,b]$), то

$$\Delta_\gamma \arg z = \Delta_{\gamma_1} \arg z + \Delta_{\gamma_2} \arg z;$$

в) если γ — непрерывно дифференцируемая замкнутая кривая, то

$$\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi} = i\Delta_\gamma \arg z = 2\pi i n, \tag{8.7}$$

где n — число обходов кривой γ вокруг нуля с учетом направления.

Доказательство. Пусть $\Theta(t)$ — функция из равенства (8.5).

а) По определению $\gamma^-(t) = \gamma(b+a-t)$, Поэтому функция $\Theta^-(t) = \Theta(b+a-t)$ непрерывна и удовлетворяет соотношению

$$\gamma^-(t) = |\gamma^-(t)|e^{i\Theta^-(t)}, \quad t \in [a,b].$$

Следовательно,

$$\Delta_{\gamma^-} \arg z = \Theta^-(b) - \Theta^-(a) = \Theta(a) - \Theta(b) = -\Delta_\gamma \arg z.$$

б) По условию $\Delta_{\gamma_1} \arg z = \Theta(c) - \Theta(a)$, $\Delta_{\gamma_2} \arg z = \Theta(b) - \Theta(c)$. Поэтому

$$\Delta_{\gamma_1} \arg z + \Delta_{\gamma_2} \arg z = \Theta(b) - \Theta(a) = \Delta_\gamma \arg z.$$

в) В силу предложения 38, имеем $\gamma(t) = r(t)e^{i\Theta(t)}$, $t \in [a,b]$, где функции $r(t) = |\gamma(t)|$ и $\Theta(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, причем $r(b) = r(a)$. Следовательно

$$\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi} = \int_a^b \frac{\left(r(t)e^{i\Theta(t)}\right)'}{r(t)e^{i\Theta(t)}} dt =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\Theta'(t)\right) dt = \left(\ln r(t) + i\Theta(t)\right)\Big|_a^b = i\Delta_\gamma \arg z.$$

$\square$

Следствие 16. *Не существует действительной функции $\theta(z)$ непрерывной в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и удовлетворяющей в ней уравнению $z = |z|e^{i\theta(z)}$.*

Определение 42. Величина $\Delta_\gamma \arg f(z) := \Delta_\Gamma \arg w$ называется *изменением аргумента функции $f(z)$ вдоль γ.*

Предложение 40 (Свойства $\Delta_\gamma \arg f(z)$)**.** *Пусть γ — непрерывная кривая, функция $f(z)$ отлична от нуля и непрерывна вдоль γ, кривая Γ является образом γ при отображении f. Тогда:*

а) $\Delta_{\gamma^-} \arg f(z) = -\Delta_\gamma \arg f(z)$;

б) если $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, то

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_{\gamma_1} \arg f(z) + \Delta_{\gamma_2} \arg f(z);$$

в) если $f(z) = f_1(z) f_2(z)$, где функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ непрерывны вдоль γ, то

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z);$$

г) если кривая γ — непрерывно дифференцируема и $f \in \mathcal{O}(\gamma)$, то[1]

$$\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = i\Delta_\gamma \arg f(z) = 2\pi i n, \tag{8.8}$$

где n — число обходов кривой Γ вокруг нуля с учетом направления.

Доказательство. Как и выше, считаем, что кривая γ параметризована отрезком $[a, b]$.

Свойства а) и б) немедленно следуют из предложения 39.

в) По условию функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ отличны от нуля на кривой γ. Пусть $\Gamma_j(t) = f_j(\gamma(t))$, $j = 1, 2$, $t \in [a, b]$. В силу части 1 предложения 38, существуют такие непрерывные действительные функции Θ_1 и Θ_2, что

$$\Gamma_j(t) = |\Gamma_j(t)| e^{i\Theta_j(t)}, \quad j = 1, 2, \quad t \in [a, b].$$

Поэтому

$$\Gamma(t) = \Gamma_1(t)\Gamma_2(t) = |\Gamma_1(t)\Gamma_2(t)| e^{i(\Theta_1(t)+\Theta_2(t))} = |\Gamma(t)| e^{i\Theta(t)},$$

где $\Theta(t) = \Theta_1(t) + \Theta_2(t)$. Следовательно,

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\Gamma w = \Theta(b) - \Theta(a) =$$

$$= (\Theta_1(b) - \Theta_1(a)) + (\Theta_2(b) - \Theta_2(a)) =$$

[1]напомним, что $f \in \mathcal{O}(\gamma)$, если функция f голоморфна в окрестности кривой γ

$$= \Delta_{\Gamma_1} w + \Delta_{\Gamma_2} w = \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z).$$

г) Так как Γ является замкнутой непрерывно дифференцируемой кривой, то из (8.7) имеем

$$i\Delta_\gamma \arg f(z) = i\Delta_\Gamma \arg w = \int_\Gamma \frac{dw}{w} = \{\Gamma(t) = f(\gamma(t)), t \in [a, b]\} =$$

$$= \int_a^b \frac{(f(\gamma(t)))'}{f(\gamma(t))} dt = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))} dt = \int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi.$$

$\square$

Замечание 14. Пусть D — область с простой границей $\partial D = \cup_{j=1}^{n}\gamma_j$, где кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ попарно не пересекающиеся простые замкнутые кривые, ориентированные так, что при обходе по ∂D область D остается слева. Рассмотрим функцию $f(z)$ непрерывную и отличную от нуля на ∂D. Из свойств предложения 40 вытекает, что величина

$$\Delta_{\partial D} \arg f(z) := \sum_{j=1}^{n} \Delta_{\gamma_j} \arg f(z)$$

определена корректно, причем свойства в), г) остаются справедливыми при замене кривых γ и Γ на множество ∂D и его образ при отображении f соответственно.

41. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.

Предложение 41 (Принцип аргумента)**.** *Пусть D — область с простой границей, функция $f(z)$ мероморфна в некоторой области $G \Supset D$ и имеет в области G не более чем конечное число нулей и полюсов, причем все эти нули и полюсы содержатся в области D. Тогда*

$$N(f,D) - P(f,D) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg f(z). \tag{8.9}$$

Доказательство. По теореме о логарифмическом вычете (см. (8.1)) и замечания 14, имеем

$$N(f,D) - P(f,D) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg f(z).$$

□

Следующее утверждение имеет многочисленные применения, в частности позволяет доказать основную теорему алгебры.

Теорема 19 (Теорема Руше). *Пусть D — область с простой границей, функции $\phi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфны в некоторой области $G \Supset D$ и*

$$|\phi(z)| > |\psi(z)| \quad \textit{при всех} \quad z \in \partial D. \tag{8.10}$$

Тогда функции $\phi(z)$ и $\phi(z)+\psi(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей с учетом кратности.

Доказательство. В силу (8.10), в каждой точке $z \in \partial D$:

$$\phi(z) \neq 0, \quad |\phi(z)+\psi(z)| \geq |\phi(z)| - |\psi(z)| > 0.$$

Тем самым обе функции $\phi(z)$ и $\phi(z)+\psi(z)$ не имеют нулей на ∂D.

Покажем, что в области D функция $\phi(z)$ имеет конечное число нулей. Предположим от противного, что это не так. Тогда множество нулей функции $\phi(z)$ имеет предельную точку $z_0 \in \overline{D} \subset G$ и, по теореме единственности, $\phi \equiv 0$ в области G. Но $\phi(z) \neq 0$ при $z \in \partial D$, что противоречит нашему предположению. Аналогично, функция $\phi(z)+\psi(z)$ имеет конечное число нулей в области D. Возьмем такую область G_1, что $D \Subset G_1 \subset G$ и все нули функций $\phi(z)$ и $\phi(z)+\psi(z)$ из области G_1 лежат в области D. (Для этого в каждой точке $\xi \in \partial D$ возьмем круг $U_{r_\xi}(\xi) \subset G$, не содержащий нулей функций $\phi(z)$ и $\phi(z)+\psi(z)$ и положим $G_1 = D \cup \left(\cup_{\xi\in\partial D} U_{r_\xi}(\xi)\right)$.) Применяя принцип аргумента к функциям $\phi(z)$ и $\phi(z)+\psi(z)$, получаем

$$N(\phi, D) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg \phi(z), \quad N(\phi+\psi, D) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg\left(\phi(z)+\psi(z)\right). \tag{8.11}$$

В силу замечания 14,

$$\begin{aligned}\Delta_{\partial D} \arg\left(\phi(z)+\psi(z)\right) &= \Delta_{\partial D} \arg\left(\phi(z)\left(1+\frac{\psi(z)}{\phi(z)}\right)\right) = \\ &= \Delta_{\partial D} \arg \phi(z) + \Delta_{\partial D} \arg\left(1+\frac{\psi(z)}{\phi(z)}\right).\end{aligned} \tag{8.12}$$

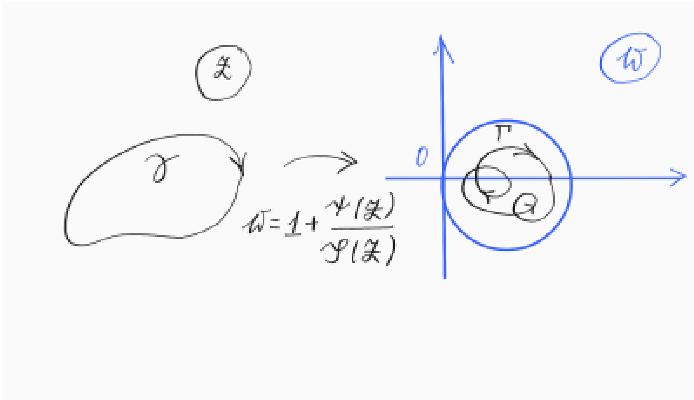


Рис. 8.3:

По условию, $\left|\frac{\psi(z)}{\phi(z)}\right| < 1$ при $z \in \partial D$. Поэтому для каждой простой жордановой кривой $\gamma \subset \partial D$, ее образ Γ при отображении $w = 1 + \frac{\psi(z)}{\phi(z)}$ содержится в круге $U_1(1)$, который, в свою очередь, содержится в правой полуплоскости (см. рис. 8.3). Отсюда

$$\Delta_\gamma \arg\left(1 + \frac{\psi(z)}{\phi(z)}\right) = \Delta_\Gamma \arg w = 0$$

(последнее равенство вытекает из следствия 15).

Таким образом, $\Delta_{\partial D} \arg\left(1 + \frac{\psi(z)}{\phi(z)}\right) = 0$ и, согласно (8.12), (8.11), последовательно имеем

$$\Delta_{\partial D} \arg\left(\phi(z) + \psi(z)\right) = \Delta_{\partial D} \arg \phi(z),$$

$$N(\phi + \psi, D) = \quad N(\phi, D).$$

$\square$

Доказательство основной теоремы алгебры с помощью теоремы Руше. Пусть

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n \neq 0$$

— многочлен степени n комплексными коэффициентами. Покажем, что многочлен $P(z)$ имеет ровно n комплексных корней с учетом кратности.

Во-первых, существует такое $R > 0$, что при $|z| \geq R$ справедлива оценка

$$|a_n z^n| > |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0|,$$

значит и $|P_n(z)| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0| > 0$. Поэтому все корни многочлена $P_n(z)$ лежат в круге $U_R(0)$.

Во-вторых, полагая $D = U_R(0)$, $\phi(z) = a_n z^n$, $\psi(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, по теореме Руше получаем

$$N(P_n, D) = N(\phi + \psi, D) = N(\phi, D) = n.$$

!Основная теорема алгебры.
$\forall$ комплексный многочлен $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots$
имеет в $\mathbb{C}$ n корней, с учетом кр-стей.

42. **Лемма о числе прообразов вблизи данной точки. Принцип сохранения области.**

Лемма 6 (Лемма о числе прообразов вблизи данной точки). *Пусть* $f(z)$ *— непостоянная голоморфная функция в окрестности точки* z_0, $w_0 = f(z_0)$, $n = \min\{j \in \mathbb{N} : f^{(j)}(z_0) \neq 0\}$ *(иными словами,* n *— порядок нуля функции* $f(z) - w_0$ *в точке* z_0*). Тогда существует такое* $\rho > 0$, *что для любого* $r \in (0, \rho)$*:*

а) $f^{-1}(w_0) \cap U_r(z_0) = \{z_0\}$*;*

б) найдется такое $\delta = \delta(r) > 0$, *что для любого* $w \in U^0_\delta(w_0)$ *множество* $f^{-1}(w) \cap U_r(z_0)$ *состоит ровно из* n *точек.*

Доказательство. В силу изолированности нулей непостоянной голоморфной функции $f(z) - w_0$, существует такое $\rho_1 > 0$, что $f \in \mathcal{O}(U_{\rho_1}(z_0))$ и $f(z) \neq w_0$ при $z \in U^0_{\rho_1}(z_0)$. Поскольку $f'(z)$ не равна тождественно нулю в круге $U_{\rho_1}(z_0)$, то существует такое $\rho \leq \rho_1$, что $f'(z)$ отлична от нуля всюду в круге $U_\rho(z_0)$ за исключением, быть может, точки z_0.

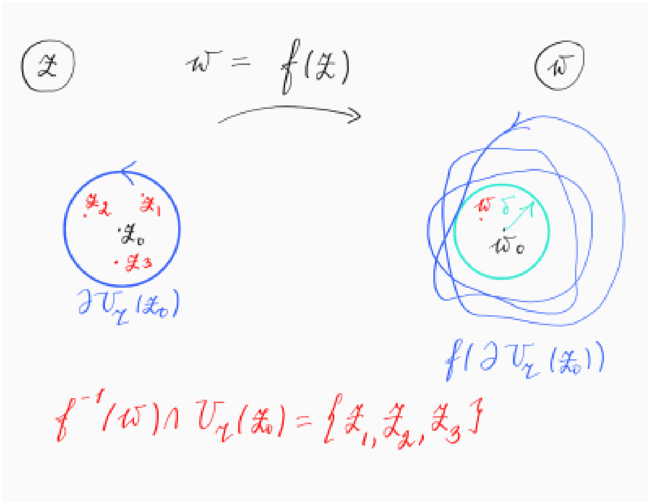


Рис. 9.1:

Проверим, что число ρ — искомое. Поскольку $\rho \leq \rho_1$, справедливо утверждение а).

Возьмем произвольное $r \in (0, \rho)$. Так как $f(z) - w_0 \neq 0$ на компакте $\partial U_r(z_0)$, то число

$$\delta := \min_{z \in \partial U_r(z_0)} |f(z) - w_0| > 0.$$

Рассмотрим функцию $\phi(z) = f(z) - w_0$. В силу а), точка w_0 является единственным нулем функции $\phi(z)$ в круге $U_r(z_0)$ и по условию порядок этого нуля равен n. Отсюда $N(\phi, U_r(z_0)) = n$. Возьмем любое $w \in U_\delta^0(w_0)$. Тогда в круге $U_r(z_0)$ функции $\phi(z) = f(z) - w_0$ и $\psi(z) = w_0 - w$ (функция ψ постоянна) удовлетворяют условиям теоремы Руше, ибо ϕ, $\psi \in \mathcal{O}(\overline{U_r(z_0)})$ и в точках $z \in \partial U_r(z_0)$ выполняется неравенство

$$|\psi(z)| = |w_0 - w| < \delta \leq |f(z) - w_0| = |\phi(z)|.$$

Поэтому число нулей функции $f - w = \phi + \psi$ в этом круге равно

$$N(f - w, U_r(z_0)) = N(\phi + \psi, U_r(z_0)) = N(\phi, U_r(z_0)) = n.$$

Пусть z — любой из этих нулей. Так как $w \neq w_0$ и $r < \rho$, то $z \neq z_0$ и $(f(z) - w)' = f'(z) \neq 0$. Значит, порядок нуля функции $f - w$ в точке z равен единице. Следовательно, все нули функции $f - w$ из круга $U_r(z_0)$

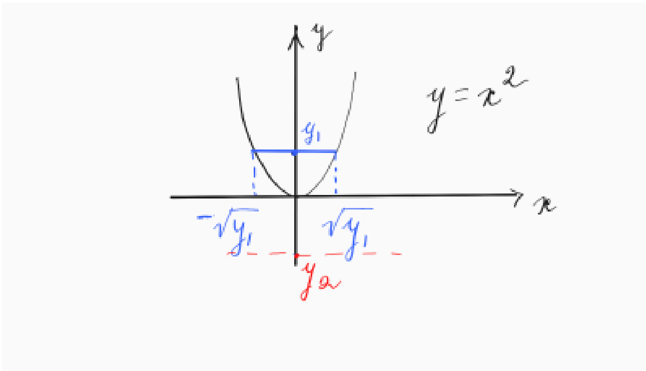


Рис. 9.2:

различны и их ровно n (на рис. 9.1 $n = 3$), что доказывает утверждение б). $\square$

Отметим, что для действительных функций предыдущее утверждение неверно. Например, если $y = x^2$, то в любой проколотой окрестности точки $y_0 = 0$ есть как точки, имеющие 2 прообраза (если $y > 0$), так и точки, не имеющие прообразов (если $y < 0$) (см. рис. 9.2).

Следствие 17. *Пусть $f(z)$ — непостоянная голоморфная функция в окрестности точки z_0, $w_0 = f(z_0)$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что круг $U_\delta(w_0)$ содержится в образе этой окрестности при отображении f.*

Доказательство. Возьмем ρ как в лемме 6 и $r \in (0, \rho)$. Тогда $\delta = \delta(r)$ — искомое. $\square$

Предложение 42 (Принцип сохранения области)**.** *Пусть функция f непостоянна и голоморфна в области D. Тогда множество $G = f(D)$ является областью.*

Доказательство. В силу следствия 17, каждая точка $w_0 \in G$ содержится в множестве G вместе с некоторой δ-окрестностью. Поэтому множество G открыто.

Рассмотрим произвольные точки $w_0, w_1 \in G$. По условию существуют такие z_1, $z_2 \in D$, что $w_j = f(z_j)$, $j = 1, 2$. Так как множество D является областью, то D линейно связно, значит существует непрерывная кривая γ, лежащая в D, с началом в точке z_0 и концом в точке z_1. Пусть кривая

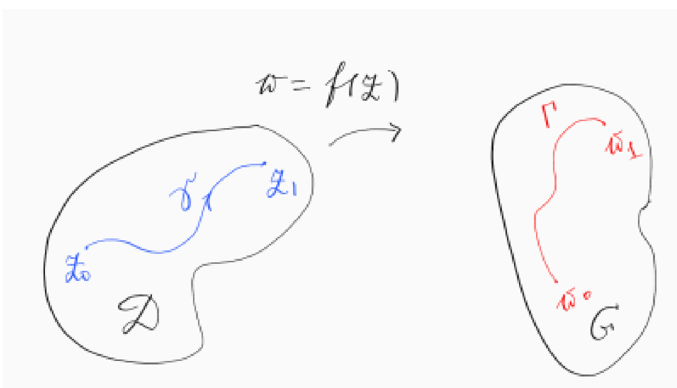


Рис. 9.3:

Γ является образом кривой γ при отображении f (см. рис. 9.3). Тогда Γ — непрерывная кривая, лежащая в множестве G, с началом в точке w_0 и концом в точке w_1. Таким образом, G — линейно связно.

Итак, G — открытое линейно связное множество, следовательно, область. $\square$

43. **Критерий локальной однолистности. Теорема об обратном отображении.**

Определение 43. Пусть E — открытое множество и функция $f(z)$ определена на E. Функция $f(z)$ называется *однолистной на множестве* E, если образы различных точек из множества E различны. Функция f называется *локально однолистной на множестве* E, если для любой точки $z_0 \in E$ существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ однолистна.

Предложение 43 (Критерий локальной однолистности)**.** *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D. Тогда для локальной однолистности функции $f(z)$ в области D необходимо и достаточно, чтобы $f'(z) \neq 0$ в области D.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(z)$ локально однолистна в D. Очевидно, что f непостоянна в D. Предположим от противного, что существует такая $z_0 \in D$, что $f'(z_0) = 0$. Тогда число $n = \min\{j \in \mathbb{N} :$

$f^{(j)}(z_0) \neq 0\} \geq 2$. Возьмем окрестность $V \subset D$ точки z_0, в которой функция $f(z)$ однолистна. Пусть ρ, $r \in (0, \rho)$, $\delta = \delta(r)$ — как в лемме 6, причем число $r \in (0, \rho)$ такое маленькое, что $U_r(z_0) \subset V$, $w \in U^0_\delta(w_0)$. В силу леммы 6, множество $f^{-1}(w) \cap U_r(z_0)$ состоит из n точек. Следовательно, функция f не является однолистной в V — противоречие.

Достаточность. Пусть $f'(z) \neq 0$ в области D. Возьмем любую $z_0 \in D$. Тогда число $n = \min\{j \in \mathbb{N} : f^{(j)}(z_0) \neq 0\} = 1$. Вновь, пусть ρ, $r \in (0, \rho)$, $\delta = \delta(r)$ — как в лемме 6. Тогда для любого $w \in U_\delta(w_0)$ существует единственная точка $z \in U_r(z_0)$, для которой $f(z) = w$. В силу непрерывности функции $f(z)$, прообраз $f^{-1}\left(U_\delta(w_0)\right)$ является открытым множеством в D. Значит $f(z)$ однолистна на открытом множестве $V = U_r(z_0) \cap f^{-1}\left(U_\delta(w_0)\right)$, содержащем точку z_0. $\square$

Предложение 44 (Общая теорема об обратной функции)**.** *Пусть функция $f(z)$ однолистна и голоморфна в области D. Тогда функция $g(w)$, обратная к $f(z)$, голоморфна в области $f(D)$, причем $g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$. (Согласно принципу сохранения области, множество $f(D)$ является областью.)*

Доказательство. Так как функция $f(z)$ однолистна в области D, то в каждой точке $z \in D$ в силу критерия локальной однолистности, $f'(z) \neq 0$, значит число $n = \min\{j \in \mathbb{N} : f^{(j)}(z) \neq 0\} = 1$ независимо от z.

Покажем, что $g \in C(f(D))$. Достаточно показать, что $g(w)$ непрерывна в произвольной точке $w_0 \in f(D)$. Действительно, пусть $z_0 = g(w_0)$, ρ как в лемме 6 и $\epsilon > 0$ — произвольное. Возьмем число r из интервала $(0, \min(\rho, \epsilon))$. Из леммы 6 следует, что существует такое $\delta(r) > 0$, что для любого $w \in U_\delta(w_0)$ множество $f^{-1}(w) \cap U_r(z_0)$ состоит из одной точки. Но эта точка равна $g(w)$, следовательно,

$$\text{если} \quad |w - w_0| < \delta, \quad \text{то} \quad |g(w) - g(w_0)| < r < \epsilon,$$

откуда и следует непрерывность функции $g(w)$ в точке w_0.

Таким образом, отображение $w = f(z)$ является гомеоморфизмом области D на область $f(D)$ и $f' \neq 0$ в точках из D. Далее следует применить теорему об обратной функции, доказанную в предложении 6 главы 2. $\square$

44. **Принцип максимума модуля и его следствия. Вторая теорема Вейерштрасса для голоморфных функций.**

—

Предложение 45 (Принцип (локального) максимума модуля для голоморфной функции)**.** *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D и $|f(z)|$ имеет локальный максимум в точке $z_0 \in D$. Тогда функция $f(z)$ постоянна.*

Доказательство. Допустим, что функция $f(z)$ непостоянна и $w_0 = f(z_0)$. По условию существует такое $r > 0$, что $|f(z)| \le |w_0|$ для всех $z \in U_r(z_0)$. В силу следствия 17 существует такое $\delta > 0$, что

$$U_\delta(w_0) \subset f\left(U_r(z_0)\right). \tag{10.1}$$

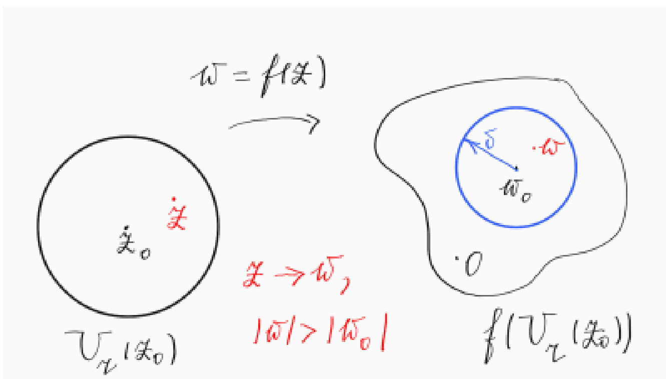


Рис. 10.1:

В круге $U_\delta(w_0)$ найдется такая точка w, что $|w| > |w_0|$ (см. рис. 10.1). Согласно включению (10.1), существует $z \in \{f^{-1}(w)\} \cap U_r(z_0)$, поэтому

$$|f(z)| = |w| > |w_0| = |f(z_0)| \quad \text{— противоречие.}$$

$\square$

Следствие 18. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна и не имеет нулей в области D. Тогда если $|f(z)|$ имеет (локальный) минимум в точке $z_0 \in D$, то функция $f(z)$ постоянна.*

Доказательство. По условию функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ голоморфна в D и имеет (локальный) максимум в точке z_0. По предыдущему утверждению функция $g(z)$ постоянна . Следовательно, и $f(z)$ постоянна. $\square$

Следствие 19. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда* $\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|$.

Доказательство. Так как функция $f(z)$ непрерывна на компакте $\overline{D}$, существует $z_0 \in \overline{D}$ в которой достигается максимум $|f(z)|$. Если функция $f(z)$ постоянна в D (а значит и в $\overline{D}$), то утверждение верно. Если $f(z)$ непостоянна, то, по принципу максимума модуля, $z_0 \notin D$, поэтому утверждение также верно. $\square$

Следствие 20. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$ и $f_1(z) = f_2(z)$ в точках $z \in \partial D$. Тогда $f_1(z) = f_2(z)$ в точках области D.*

Доказательство. Нужно применить следствие 19 к функции $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$. $\square$

Предложение 46 (Вторая теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций)**.** *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, $f_n \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$, $n \in \mathbb{N}$ и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{10.2}$$

сходится равномерно на ∂D. Тогда этот ряд сходится равномерно в $\overline{D}$ и его сумма голоморфна в D.

Доказательство. Из критерия Коши равномерной сходимости ряда (10.2) на ∂D следует, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ и $z \in \partial D$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{j=n+1}^{n+p} f_j(z) \right| < \epsilon. \tag{10.3}$$

В силу следствия 19, неравенство (10.3) справедливо для тех же n, p и для всех $z \in \overline{D}$, значит ряд (10.2) сходится равномерно в $\overline{D}$ к некоторой функции $f(z)$. Согласно первой теореме Вейерштрасса, $f \in \mathcal{O}(D)$. $\square$

45. **Понятие конформного отображения областей в $\overline{\mathbb{C}}$. Теорема о конформном отображении области. Обратный принцип соответствия границ, теоремы Каратеодори и Римана (б/д).**

Определение 44. Пусть D, G — области в $\overline{\mathbb{C}}$. Отображение $w = f(z)$ называется конформным отображением D на G, если оно является биекцией D на G и конформно в каждой точке области D.

Предложение 48 (Конформность отображения, осуществляемого однолистной голоморфной функцией). *Пусть функция $f(z)$ голоморфна и однолистна в области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда $w = f(z)$ является конформным отображением D на $f(D)$ и обратное к нему отображение $z = g(w)$ является конформным отображением $f(D)$ на D.*

Справедливо и обратное утверждение, которое мы приведем без доказательства

Предложение 49. *Пусть D, G — области в $\mathbb{C}$ и f конформно отображает D на G. Тогда f является однолистной голоморфной функцией в области D.*

996

$w_0 \in \mathbb{C} \setminus D_2$). Тогда мы получим, что функция $f(z)$ однолистна в D_1 и $f(D_1) = D_2$, а значит, в силу предложения 48, f конформно отображает D_1 на D_2.

Пусть $\gamma_1(t), t \in [a,b]$ — параметризация кривой γ_1. Так как f гомеоморфно отображает γ_1 на γ_2, то $f(\gamma_1(t)), t \in [a,b]$ — либо параметризация кривой γ_2, либо параметризация кривой γ_2^-.

Предположим, что $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma_2$. Тогда функция $f(z) - w_0$ не имеет нулей на $\gamma_1 = \partial D_1$. Применяя теорему о логарифмическом вычете к функции $f(z) - w_0$ и области D_1, получаем

$$\begin{aligned} N(f(z) - w_0, D_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{(f(\xi) - w_0)'}{f(\xi) - w_0} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma_1(t))}{f(\gamma_1(t)) - w_0} \gamma_1'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(f(\gamma_1(t)))'}{f(\gamma_1(t)) - w_0} dt. \end{aligned} \tag{11.2}$$

С другой стороны, применяя теорему о логарифмическом вычете к функции $w - w_0$ и области D_2, получаем

$$\begin{aligned} N(w - w_0, D_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{(w - w_0)'}{w - w_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{w - w_0} dw = \\ &= \pm \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{f(\gamma_1(t)) - w_0} \left(f(\gamma_1(t))\right)' dt. \end{aligned} \tag{11.3}$$

(Знак $\pm$ мы пишем потому, что пока не знаем, является ли $f(\gamma_1(t)), t \in [a,b]$ параметризацией кривой γ_2 или γ_2^-). Таким образом, $N(f(z) - w_0, D_1) = \pm N(w - w_0, D_2)$. Но, так как число нулей не может быть отрицательным, то

$$N(f(z)-w_0, D_1) = N(w-w_0, D_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } w_0 \in D_2, \\ 0, & \text{если } w_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_2}. \end{cases} \qquad (11.4)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $w_0 \in \gamma_2$. Допустим, от противного, что существует такая точка $z_0 \in D_1$, что $f(z_0) = w_0$. Так как функция f непостоянна, то из принципа сохранения области следует, что существует круг $U_\delta(w_0)$, принадлежащий $f(D_1)$. Но, так как γ_2 — кусочно гладкая кривая, то в круге $U_\delta(w_0)$ найдется точка $w_1 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_2}$ (см. рис. 11.2). (Этот геометрический факт примем без доказательства.) Поэтому получается, что $N(f(z) - w_1, D_1) > 0$, что противоречит доказанному выше. $\square$

Теорема 21 (Теорема Каратеодори). *Пусть D_1, D_2 — ограниченные односвязные области с простой границей, функция f голоморфна в D_1 и осуществляет конформное отображение D_1 на D_2. Тогда f продолжается до гомеоморфизма $\overline{D_1} \to \overline{D_2}$.*

Следующее утверждение также приведем без доказательства

Теорема 22 (Теорема Римана). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, отличная от $\mathbb{C}$. Тогда существует однолистная голоморфная в D функция f, осуществляющая конформное отображение области D на единичный круг $U_1(0)$.*